Vol. XVIII, 1 REVISTA MEXICANA DE FISICA 1969

BREVE NOTA SOBRE LAS ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA

Gordon W. Groves *† y Gustavo Camacho*

Instituto de Geofísica, Universidad Nacional de México

(Recibido: 22 Agosto 1968)

RESUMEN

Se presentan las ecuaciones de la Hidrodinámica en forma tensorial, válidas para cualquier sistema curvilíneo de coordenadas con movimiento arbitrario respecto a un marco inercial. La ecuación de vorticidad muestra diferencias básicas entre espacios bidimensionales y tridimensionales.

ABSTRACT

The hydrodynamic equations are presented in tensorial form, valid for any curvilinear coordinate system with arbitrary motion relative to an inertial system.

*† Hawaii Institute of Geophysics, Departamento de Oceanografía de la Universidad de Hawaii. (1007).

* Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional de México. (1007).

Basic differences between two-dimensional and three-dimensional spaces are noted.

INTRODUCCION

El tratamiento tradicional de la Hidrodinámica presenta algunos inconvenientes:

a) Aún cuando las ecuaciones se expresen en forma vectorial, generalmente los sistemas de coordenadas usados son cartesianos, y la consideración de problemas en otros sistemas requieren ciertos esfuerzos para efectuar las transformaciones.

b) Es difícil reducir las ecuaciones para un espacio tridimensional a uno de dos dimensiones y vice-versa.

Es claro que cualquier desarrollo independiente del sistema de coordenadas requiere el uso de métodos tensoriales. ¿Se logran ventajas al considerar las ecuaciones hidrodinámicas en forma tensorial, independiente del número de dimensiones, del sistema de coordenadas y de la curvatura del espacio? Es evidente que espacios de más de tres dimensiones no tienen interés en la hidrodinámica clásica, ni espacios curvos de más de dos dimensiones. En cambio sí resulta útil un desarrollo general que abarque el tratamiento de problemas en espacios planos de tres dimensiones y para espacios curvos de dos dimensiones. Como ventaja adicional se facilita la resolución de problemas de hidrodinámica en cualquier sistema de coordenadas.

Empezaremos reemplazando los tensores cartesianos por tensores generalizados en las ecuaciones de hidrodinámica. Si las expresiones resultantes se reducen a la forma original, al especializarlas para sistemas de coordenadas cartesianas, entonces serán válidas en cualesquier sistemas de coordenadas que puedan obtenerse por una transformación del sistema cartesiano original. Es decir, serán válidas en cualquier sistema de coordenadas para espacios planos. Se puede extender este tratamiento a espacios curvos si se toma en cuenta que un sistema cartesiano de coordenadas siempre puede usarse en una región limitada del espacio curvo.

TENSORES ISOTROPICOS

El concepto de tensor isotrópico es usualmente asimilado al de tensor cartesiano, puesto que "isotropía" significa invariancia de los componentes bajo una rotación rígida (o reflexión) de las coordenadas. Sujetos a este grupo restringido de transformaciones, los sistemas cartesianos de coordenadas se transforman en otros sistemas cartesianos. Los únicos tensores isotrópicos, hasta rango cuatro, son:

	Dos dimensiones	Tres dimensiones
Rango cero	a	a
rango uno	ninguno	ninguno
rango dos	$a\delta_{rs} + b\sigma e_{rs}$	$a\delta_{rs}$
rango tres	ninguno	$a\sigma e_{rst}$
rango cuatro	$a\delta_{rs}\delta_{tu} + b\delta_{rt}\delta_{su} + c\delta_{ru}\delta_{st}$	$a\delta_{rs}\delta_{tu} + b\delta_{rt}\delta_{su} + c\delta_{ru}\delta_{st}$

donde: a, b, c, son funciones escalares, δ_{rs} es la delta de Kronecker y $e_{rs} \ldots$ son tensores de permutación siempre de rango igual al número de dimensiones, con valor 0, 1 a -1, si existen indices repetidos, si los indices son permutaciones pares de la sucesión 1,2,3 ... o sí son permutaciones impares de esta sucesión, respectivamente. La σ es igual a 1 o a -1 dependiendo de que el sistema de coordenadas sea derecho o izquierdo. Por lo tanto σ cambia de signo bajo una reflexión de coordenadas. El criterio de isotropía en el caso de un tensor generalizado puede establecerse como sigue: Bajo la transformación de un tensor generalizado, de un sistema coordenado curvilíneo a un sistema cartesiano, las componentes resultantes son las mismas prescindiendo de la orientación de ese sistema cartesiano. Entonces, los únicos tensores generalizados isotrópicos corresponderán a los mostrados en la tabla precedente, donde δ_{rs} se reemplaza por el tensor métrico g_{rs} y $\sigma e_{rs} \ldots$ es sustituido por $e_{rs} = \sigma g^{\frac{1}{2}} e_{rs} \ldots$ (con el fin de obtener componentes covariantes). La g representa al determinante de las componentes covariantes del tensor métrico, que supondremos siempre positivo.

CONSERVACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En un sistema cartesiano, las ecuaciones de movimiento tienen la forma:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_s u_{r,s} + C_{sr} u_s + G_r = -\alpha p_{,r} - \Omega_{,r} + \lambda u_{s,sr} + \nu u_{r,ss} \tag{1}$$

donde las u_r representan las componentes de velocidad, p la presión, ρ la densidad, $\alpha = \rho^{-1}$ el volumen específico, Ω el potencial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el fluido, y λ, ν propiedades (escalares) del fluido ligadas a los efectos de viscosidad.

El parámetro ν se conoce como la viscosidad cinemática. El parámetro λ no tiene nombre comunmente aceptado – bajo la hipótesis de Stokes es reemplazado por $-\frac{2}{3}\nu$. La coma designa diferenciación parcial. El primer miembro de (1) representa a la aceleración de una partícula de fluido medida respecto a un sistema inercial de coordenadas (Groves, 1967). El tensor C_{rs} representa a la aceleración de Coriolis y G_r a la aceleración centrípeta. Estas mismas ecuaciones pueden expresarse en términos de tensores generalizados en forma tal que en el caso especial de coordenadas cartesianas se reducirá a la ecuación (1). Debido a la presencia del término $\lambda u_{s,sr}$ aparece la dificultad de que no existe una manera única de efectuar la reducción. En un sistema cartesiano el orden de diferenciación puede ser invertido sin cambiar el valor de la doble derivada. El problema consiste entonces en determinar cual es el orden correcto de diferenciación al sustituir la diferenciación parcial. Para escoger el camino adecuado vamos a considerar el penúltimo término de (1), tomando en cuenta que proviene de la divergencia del tensor de los esfuerzos, que es simétrico.

El tensor de los esfuerzos tiene la forma:

$$T_{rs} = -p\delta_{rs} + \rho(\lambda - \nu)\,\delta_{rs}\,u_{n,n} + \rho\nu\,(u_{r,s} + u_{s,r}) \tag{2}$$

representado en tensores cartesianos. Esta es esencialmente la hipótesis de Navier, donde los términos no lineales en el gradiente de velocidad son desechados. En algunos casos en que la densidad cambia rápidamente, etc., dicha hipótesis no proporciona una descripción adecuada de los esfuerzos. Estos casos están fuera del alcance de este trabajo. La ecuación (2) es válida en una pequeña región de un espacio curvo; por lo tanto puede escribirse en la forma:

$$T_r^{\ s} = -p\delta_r^{\ s} + \rho(\lambda - \nu)\,\delta_r^{\ s} g^{nm} u_{n;m} + \rho\nu\, g^{ns}(u_{r;n} + u_{n;r}) \tag{3}$$

en tensores generalizados, donde el punto y coma representa diferenciación covariante. Esta expresión proviene de las consideraciones usuales de isotropía, en las cuales los tensores isotrópicos generalizados antes mencionados pueden ser útiles. Es de notarse que no hay ambigüedad en la manera en que se expresa (3). Siendo, por lo tanto, la única expresión tensorial que se reducirá a (2) en el caso cartesiano. Considerando la divergencia de la expresión (3), es consecuente por lo tanto, que la ecuación de Navier tenga la forma:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + g^{sn} u_s u_{r;n} + C_r^{\ s} u_s + G_r = -\alpha p_{,r} - \Omega_{,r} +$$

$$+ \nu g^{sn} u_{r;sn} + \lambda g^{sn} u_{s;nr} \tag{4}$$

en tensores generalizados.

LAS ECUACIONES DE VORTICIDAD

Consideremos el gradiente de la velocidad, $u_{r;s}$. La parte simétrica de este tensor representa la rapidez de deformación y compresión de un elemento de fluido. La parte antisimétrica representa la rapidez de rotación.

La vorticidad se define como el doble de esta velocidad de rotación:

$$W_{rs} = u_{r;s} - u_{s;r} \tag{5}$$

Debido a su antisimetría contiene solamente un componente independiente para dos dimensiones, y solo tres componentes independientes en tres dimensiones. Por esta razón la vorticidad es frecuentemente representada por un vector en tres dimensiones. En este caso un vector vorticidad se obtiene como el producto interior entre el tensor definido y el tensor de permutación, o sea:

$$w^r = -\frac{1}{2}\epsilon^{rsn} W_{sn} = -\epsilon^{rsn} u_{s;n} \tag{6}$$

Es fácil demostrar que las componentes w^r determinan sin ambigüedad a las componentes W_{rs}, entonces:

$$W_{rs} = -\epsilon_{nrs} w^n \tag{7}$$

De la misma manera, la única componente independiente de la vorticidad en dos dimensiones puede obtenerse efectuando el producto interior con el tensor de permutación de segundo rango. Este procedimiento requiere dos tratamientos diferentes dependiendo del número de dimensiones, lo cual trataremos de evitar, así nos encontramos en la necesidad de usar el tensor antisimétrico de segundo rango para representar la vorticidad.

La ecuación de vorticidad se obtiene tomando el rotacional de la ecuación de movimiento (4). Si (4) se considera como una relación vectorial de la forma

$x_r = 0$, la operación $x_{r;s} - x_{s;r} = 0$

$$\frac{\partial W_{rs}}{\partial t} + g^{nm} u_n W_{rs;m} + \frac{1}{2} g^{nm} [u_{s;n} W_{rm} - u_{r;n} W_{sm} - W_{rm} W_{sn} +$$

$$W_{nr} W_{sm}] - \nu g^{nm} W_{rs;nm} = (C_{s;r}^{\ \ n} - C_{r;s}^{\ \ n}) u_n - C_r^{\ n} u_{n;s} +$$

$$C_s^{\ n} u_{n;r} + G_{s;r} - G_{r;s} - \alpha_{,s} p_{,r} + \alpha_{,r} p_{,s} + g^{nm} R_{rsm}^{\ \ \ \ t} u_t u_n +$$

$$\nu g^{nm} [- R_{rsn;m}^{\ \ \ \ t} u_t - R_{rsn}^{\ \ \ \ t} u_{t;m} - R_{rsm}^{\ \ \ \ t} u_{t;n} +$$

$$R_{mrn}^{\ \ \ \ t} u_{s:t} + R_{smn}^{\ \ \ \ t} u_{r;t}] \tag{8}$$

donde $R_{smn}^{\ \ \ \ t}$ es el tensor de curvatura (usando la nomenclatura de Bergmann, 1942, que es la de Levi-Civita). Al desarrollar (8) se supuso que λ y ν (pero nó ρ ni α) son constantes.

EL CASO TRIDIMENSIONAL

En este caso igualamos a cero todos los términos que contienen al tensor de curvatura en (8). Puesto que la vorticidad tiene tres componentes independientes, (8) contiene 3 relaciones independientes.

Es interesante el caso de la rotación rígida de un sistema no inercial relativa a un sistema inercial (aunque las coordenadas mismas pueden ser curvilíneas). En este caso el rotacional de la aceleración centrípeta $(G_{r;s} - G_{s;r})$ es igual a cero, el tensor C_{rs} es antisimétrico y todas sus derivadas covariantes se anulan. Por lo tanto (8) puede escribirse:

$$\frac{DW_{rs}}{Dt} + \frac{1}{2} g^{nm} [u_{s;n} W_{rm} - u_{r;n} W_{sm} - W_{rm} W_{sn} + W_{nr} W_{sm}] -$$

$$- \nu g^{nm} W_{rs;nm} = C_s{}^n u_{n;r} - C_r{}^n u_{n;s} - \alpha_{,s} p_{,r} + \alpha_{,r} p_{,s} \qquad (a)$$

En donde la expresión

$$\frac{DW_{rs}}{Dt} = \frac{\partial W_{rs}}{\partial t} + g^{nm} u_n W_{rs;m}$$

recibe el nombre de Derivada Material absoluta.

EL CASO DE DOS DIMENSIONES

En este caso el tensor de curvatura se puede representar por:

$$R_{rsn}{}^t = \frac{1}{2} (\delta_r^t g_{sn} + \delta_s^t g_{rn}) R$$

donde R es la curvatura escalar. Queda ahora solo una relación independiente en (8).

El caso de rotación rígida es más complicado en dos dimensiones que en tres. Consideremos una superficie rígida inmersa en un espacio tridimensional y girando respecto a un sistema inercial. Las derivadas covariantes de C_{rs} no se anulan en general como sucede en el caso tridimensional. Pero el rotacional del vector centrípeto se anula como antes. También es posible efectuar simplificaciones en los términos cuadráticos de los gradientes de velocidad. Finalmente se obtiene:

$$\frac{DW_{rs}}{Dt} + \frac{1}{2} g^{nm} u_{n;m} W_{rs} - \nu g^{nm} W_{rs;nm} + \frac{1}{2} \nu R W_{rs} = (C_{s;r}^{n} - C_{r;s}^{n}) u_n +$$

$$+ C_s^{n} u_{n;r} - C_r^{n} u_{n;s} - a_{,s} p_{,r} + a_{,r} p_{,s} + \frac{1}{2} \nu (u_s R_{,r} - u_r R_{,s}) \qquad (10)$$

DISCUSION

La vorticidad en dos y tres dimensiones está representada por las ecuaciones (9) y (10). Son obvias las simplificaciones para fluidos perfectos y para homogeneidad o incompresibilidad. Si en un instante dado, el flujo es inrotacional, el miembro de la derecha en (9) y (10) representa la razón con la que la partícula de fluido adquiere vorticidad. Debe notarse que para el caso de fluido homogéneo en tres dimensiones el fluido adquiere vorticidad por la interacción entre el gradiente de velocidad y la aceleración de Coriolis.

En el caso de dos dimensiones, aparecen contribuciones adicionales que son lineales respecto a las componentes de velocidad y al gradiente de curvatura de la superficie, y otras que provienen del gradiente de la aceleración de Coriolis. La adquisición de vorticidad por las masas de agua moviéndose en los océanos desde o hacia los polos terrestres, es un ejemplo de éstas.

La ecuación (10) para casos en dos dimensiones debe aplicarse cuidadosamente. Se ha despreciado el efecto de la componente de la aceleración perpendicular a la superficie. Esta componente tiene influencias en la distribución de presiones, y la manera de tomarla en cuenta dependerá en la forma en que el fluido es restringido a dos dimensiones, ya sea que se suponga una superficie libre, o que el fluido quede confinado como una película entre dos superficies rígidas, etc....

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Flavio Cocho Gil y a Brent Gallagher sus valiosas sugestiones y comentarios.

REFERENCIAS

1. Bergmann, P.G., 1942: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Eleventh Printing, 1964.
2. Groves, G.W., 1967: Aceleration referred to moving curvilinear coordinates. American Journal of Physics, **35**, Nº 10, 927-929.