GENERALIZACION TENSORIAL DE LAS MATRICES DE PAULI Y TEORIA DE LA MEMBRANA DE SUPERFICIES MINIMAS

E. Piña

Instituto Mexicano del Petróleo*

(Recibido: 28 noviembre 1968)

RESUMEN

Se introduce una generalización tensorial de las matrices de Pauli por medio de tensores de segundo orden definidos sobre una superficie en términos de cantidades usuales de Geometría Diferencial. Se obtiene una aplicación en la teoría de la membrana de superficies mínimas, transformando a nuevas formulaciones de la teoría en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y en una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Se analizan también diversas expresiones de las condiciones a la frontera.

*Dirección Postal: Investigación Científica Aplicada, Av. Cien Metros 500, México 14, D.F.

ABSTRACT

A tensorial generalization for the Pauli's spin matrices is introduced by using second order tensors defined upon a surface as functions of quantities common in Differential Geometry. This generalization is applied to the membrane theory of minimal surfaces by transforming to new formulations of the theory, i.e. to a system of first order partial differential equations and to a second order partial differential equation. Different expressions for the boundary conditions are also obtained.

INTRODUCCION

En la teoría clásica de elasticidad la teoría de la membrana proporciona una solución aproximada al problema de calcular el estado de esfuerzos que mantiene en equilibrio un cuerpo cuya forma en el espacio semeja la de una superficie.

La solución de la teoría de la membrana en principio es aplicable únicamente en los casos en que sea permitido despreciar los esfuerzos no tangentes de la superficie. Sin embargo, en todos los casos, la solución de la teoría de la membrana es importante. Y tiene la simplificación que resulta de poder calcular el estado de esfuerzos sin relación directa al estado de deformación.

En el pasado, los desarrollos más importantes de la teoría de la membrana han sido la inclusión de la notación tensorial y la transformación del sistema de ecuaciones de equilibrio en una ecuación diferencial parcial lineal, de segundo orden para una variable potencial, en términos de la cual los esfuerzos se obtienen en función de derivadas parciales hasta de segundo orden.

El presente trabajo pretende implementar la teoría de la membrana agregando algunas técnicas de cálculo útiles que provienen de la definición de tensores de segundo orden que tienen propiedades análogas a las de las matrices de Pauli.

Estos tensores se definen en casi todas las superficies por las mismas ecuaciones en función de cantidades usuales de geometría diferencial clásica. Como excepciones tenemos al plano y a la esfera, de los cuales únicamente la esfera es de interés para la teoría de la membrana, y ha merecido otros tratamientos (ver por ejemplo ref. 9, pag. 104).

La primera sección del artículo está dedicada a la introducción de este formalismo que será aplicado en la segunda sección a la teoría de la membrana de superficies mínimas donde se expresa el tensor de esfuerzos en la base de tensores que generalizan las matrices de Pauli.

Se obtienen así algunas formas nuevas de expresar el problema matematico de la teoría de la membrana.

Las condiciones a la frontera de dichos problemas, en la base de tensores aquí introducida, permiten una discusión detallada que presentamos en la tercera sección.

La teoría se puede extender fácilmente a la teoría de la membrana de cualquier superficie como se discute al final del artículo.

1. GENERALIZACION DE LAS MATRICES DE PAULI SOBRE UNA SUPERFICIE

En geometría diferencial de superficies, se definen tres tensores importantes[1]:

1. El tensor métrico, o de la primera forma fundamental, cuyas componentes denotamos por

$$a_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

(Los subíndices griegos tomarán los valores 1 y 2).
Este tensor y su inverso $a^{\alpha\beta}$ serán empleados para subir y bajar índices tensoriales.

2. El tensor de la segunda forma fundamental

$$b_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

3. El tensor antisimétrico

$$\epsilon_{\alpha\beta} \ . \tag{1.3}$$

Con estas cantidades se pueden formar dos invariantes escalares no triviales: La curvatura media

$$H = \frac{1}{2}\, a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

y la curvatura gaussiana

$$K = \frac{1}{2}\, b^{\alpha\mu}\, \epsilon_{\alpha\beta}\, b^{\beta\nu}\, \epsilon_{\mu\nu} \ . \tag{1.5}$$

Los tensores $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ son proporcionales únicamente cuando la superficie es una esfera o un plano[2].

En lo que sigue excluiremos el plano y la esfera de la discusión de manera que vamos a suponer que

$$b_{\alpha\beta} \neq H a_{\alpha\beta} \ . \tag{1.6}$$

Cuando se cumple la desigualdad (1.6) se tiene también la propiedad

$$H^2 - K > 0 \ . \tag{1.7}$$

Esta expresión se anula solamente cuando la superficie es una esfera o un plano[2]. Además (1.7) es una cantidad positiva definida porque es igual al cuadrado de la semidiferencia de las curvaturas principales de la superficie.

Queremos introducir en este trabajo una base estandard para expresar cualquier tensor de segundo orden sobre una superficie arbitraria por medio de una combinación lineal de cuatro tensores.

La base que vamos a emplear está constituida por los tensores $a_{\alpha\beta}$ y $\epsilon_{\alpha\beta}$ y por los dos tensores simétricos

$$d^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{H^2 - K}} \left(\epsilon^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma} + b^{\alpha}_{\gamma} \epsilon^{\beta\gamma}\right) \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{H^2 - K}} \left(b^{\alpha\beta} - H a^{\alpha\beta}\right) . \tag{1.9}$$

Para demostrar que esos cuatro tensores son linealmente independientes, tomamos en cuenta (1.6); basta entonces demostrar que el tensor simétrico (1.8) no puede expresarse como combinación lineal de $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$. Esta demostración se hace por reducción al absurdo. Contraemos (1.8) con los dos tensores $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$. Se encuentra entonces que dicho tensor (1.8) es no nulo y linealmente independiente de $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$, siempre que se satisfacen las desigualdades (1.6) y (1.7).

La base obtenida tiene propiedades interesantes:

1) Cualquier tensor de la base es autoinverso (excepto por un signo),

$$\begin{aligned} a^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} \\ \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} &= - \delta^{\alpha}_{\beta} \\ d^{\alpha\gamma} d_{\gamma\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} \\ \mathfrak{Z}^{\alpha\gamma} \mathfrak{Z}_{\gamma\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} \quad . \end{aligned} \tag{1.10}$$

2) La traza de cualquier tensor de la base exceptuando al tensor métrico es nula,

$$\epsilon_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} = 0$$

$$d_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.11}$$

$$\mathfrak{J}_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} = 0 \ .$$

3) La contracción de dos tensores de la base es (excepto por el signo) otro tensor de la base,

$$d_{\alpha\gamma}\, \epsilon^{\gamma\beta} = \mathfrak{J}^{\beta}_{\alpha} \tag{1.12}$$

$$\mathfrak{J}_{\alpha\gamma}\, d^{\gamma\beta} = - \epsilon^{\beta}_{\alpha} \tag{1.13}$$

$$\epsilon_{\alpha\gamma}\, \mathfrak{J}^{\gamma\beta} = d^{\beta}_{\alpha} \ . \tag{1.14}$$

Estas propiedades muestran que los coeficientes del desarrollo de un tensor arbitrario en la base estarán determinados por la mitad de la doble contracción de los tensores de la base con el tensor arbitrario.

Las propiedades algebráicas de los tensores de la base tienen similitud con las propiedades algebráicas de las matrices de Pauli. Respecto a sus propiedades analíticas sabemos que los dos tensores (1.1) y (1.3) tienen derivada covariante nula. Y de la fórmula de Codazzi

$$b_{\alpha\beta\,,\,\gamma} - b_{\alpha\gamma\,,\,\beta} = 0 \tag{1.15}$$

en donde la coma denota la derivada covariante) se deducen las propiedades

$$(\sqrt{H^2 - K}\, \mathfrak{F}_\alpha^\beta)_{,\beta} = H_{,\alpha} \tag{1.16}$$

$$(\sqrt{H^2 - K}\, d_\alpha^\beta)_{,\beta} = \epsilon_\alpha^\gamma H_{,\gamma} \quad . \tag{1.17}$$

Emplearemos estas propiedades en la teoría de la membrana de cascarones en las secciones siguientes.

2. TEORIA DE LA MEMBRANA DE SUPERFICIES MINIMAS

Las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos de membrana en cada punto de una superficie son[3]:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mathfrak{F}^\alpha \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.1}$$

y

$$T^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta} = \mathfrak{F} \quad , \tag{2.2}$$

donde $T^{\alpha\beta}$ es el tensor de esfuerzos de membrana sobre la superficie y $\mathfrak{F}_\alpha$, $\mathfrak{F}$ son las componentes de la densidad de fuerza externa por unidad de área.

Queremos considerar en este trabajo la teoría de la membrana de superficies mínimas. Las superficies mínimas están caracterizadas por la propiedad

$$H = 0 \ , \tag{2.3}$$

la cual implica que van a satisfacerse las siguientes ecuaciones, a las cuales se reducen las ecuaciones de la sección 1 cuando se satisface (2.3):

$$\sqrt{-K}\, d_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\beta} \tag{2.4}$$

$$\sqrt{-K}\, \mathfrak{Z}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

$$(\sqrt{-K}\, \mathfrak{Z}^{\alpha\beta})_{,\beta} = b^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{2.6}$$

$$(\sqrt{-K}\, d^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0 \ . \tag{2.7}$$

En lo que sigue queremos estudiar las ecuaciones de equilibrio de membrana (2.1) y (2.2) de una superficie mínima haciendo uso de la base introducida en la sección precedente para desarrollar el tensor de esfuerzos $T_{\alpha\beta}$. Por ser este tensor simétrico bastan los tres tensores $a_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ y $\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$ para expresar $T_{\alpha\beta}$ como combinación lineal de los mismos. Además, puesto que nos interesa considerar la ecuación (2.1) donde aparece la divergencia del tensor que vamos a expresar en función de la base, conviene modificar dicha base agregando los factores $\sqrt{-K}$ que nos permiten utilizar las propiedades (2.6) y (2.7) de las superficies mínimas.

Expresamos entonces el tensor simétrico $T_{\alpha\beta}$ como combinación lineal de los tensores $a_{\alpha\beta}$, $\sqrt{-K}\, d_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$,

$$T_{\alpha\beta} = T a_{\alpha\beta} + F\sqrt{-K}\, d_{\alpha\beta} + G b_{\alpha\beta} \ . \tag{2.8}$$

La determinación del estado de esfuerzos sobre la superficie mínima se reduce ahora al cálculo de los tres escalares T, F y G, para lo cual se substituye la expresión (2.8) en las ecuaciones de equilibrio (2.1) y (2.2), tomando en cuenta las propiedades de la base y de toda superficie mínima.

La ecuación (2.2) se convierte en

$$-2KG = \mathfrak{Z} \ ; \tag{2.9}$$

esta ecuación nos determina el invariante G,

$$G = -\frac{\mathfrak{J}}{2K} \tag{2.10}$$

sin necesidad de tomar en cuenta condiciones a la frontera.

Consideramos entonces que el tensor de esfuerzos de membrana toma la forma

$$T_{\alpha\beta} = Ta_{\alpha\beta} + F\sqrt{-K}\,d_{\alpha\beta} - \frac{\mathfrak{J}}{2K}\,b_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

que es la más general que satisface la ecuación (2.2); el problema es ahora la determinación de los dos escalares T y F, lo que se logra substituyendo la expresión (2.10) en la ecuación de equilibrio (2.1).

Haciendo la substitución mencionada se obtiene el sistema de dos ecuaciones

$$T_{,\alpha} + F_{,\beta}\,d_{\alpha}^{\beta}\sqrt{-K} = \mathfrak{J}_{\alpha} + \left(\frac{\mathfrak{J}}{2K}\right)_{,\beta} b_{\alpha}^{\beta} \quad . \tag{2.12}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, lineales, de primer orden en dos incógnitas, y podemos acudir ahora para su solución a la literatura sobre el particular[4,5].

Indiquemos, sin embargo, que cuando se expresa el sistema de ecuaciones (2.12) tomando como coordenadas a las líneas asintóticas, no es posible la aplicación de las técnicas usuales para la solución de ese sistema. En todos los otros referenciales será posible la aplicación de las técnicas estandard. El sistema coordenado que parece dar la mayor simplificación es el de las líneas de curvatura principal, donde el sistema (2.12) se convierte fácilmente en la forma normal considerada en el estudio de estas ecuaciones.

Otra alternativa que se presenta para resolver el sistema de ecuaciones

(2.12) es la transformación en una ecuación de segundo orden, como se discute en seguida. Despejando el gradiente $T_{,\alpha}$ de la ecuación vectorial (2.12) se encuentra

$$T_{,\alpha} = \mathfrak{J}_{\alpha} + \left(\frac{\mathfrak{J}}{2K}\right)_{,\beta} b^{\beta}_{\alpha} - F_{,\beta}\, d^{\beta}_{\alpha} \sqrt{-K} \; . \tag{2.13}$$

Si conocemos la función F podremos construir este gradiente y con él, la función T podrá determinarse por cuadraturas.

El problema se convierte en la obtención de un escalar F tal que las componentes del miembro derecho de (2.13) sean las de un gradiente. La condición para ello es

$$\left(F_{,\beta}\, d^{\beta}_{\alpha}\, \epsilon^{\alpha\mu} \sqrt{-K}\right)_{,\mu} = \left(\mathfrak{J}_{\alpha}\, \epsilon^{\alpha\mu}\right)_{,\mu} + \left[\left(\frac{\mathfrak{J}}{2K}\right)_{,\beta} b^{\beta}_{\alpha}\, \epsilon^{\alpha\mu}\right]_{,\mu} \; , \tag{2.14}$$

ecuación que se expresa también en la forma

$$F_{,\beta\mu}\, b^{\beta\mu} = \epsilon^{\alpha\mu}\, \mathfrak{J}_{\alpha,\mu} - \sqrt{-K}\, d^{\beta\mu} \left(\frac{\mathfrak{J}}{2K}\right)_{,\beta\mu} \; . \tag{2.15}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial, lineal, de segundo orden, inhomogénea e hiperbólica, para la función F. Las curvas características de esta ecuación diferencial parcial son las líneas asintóticas de la superficie, que forman un sistema ortogonal en toda superficie mínima[2].

En la literatura de la teoría de la membrana de superficies se encuentran ecuaciones del mismo tipo asociadas a la obtención de esfuerzos[3,6,7,8]. Sin embargo existen algunas diferencias esenciales respecto a nuestra ecuación (2.15).

La principal diferencia radica en que en las publicaciones anteriores la función que satisface una ecuación diferencial parcial es una función potencial. Los esfuerzos de membrana se obtienen en función de segundas derivadas del potencial. Por el contrario, en esta publicación los esfuerzos de membrana se expresan directamente en términos de la solución de la ecuación diferencial (2.15).

De aquí deducimos en particular que, en nuestro caso, se obtienen inmediatamente las constantes de integración

$$T_0 a_{\alpha\beta}\,,\ F_0 \sqrt{-K}\, d_{\alpha\beta} \quad (T_0,\ F_0 \text{ constantes}) \ . \tag{2.16}$$

Estas son soluciones de las ecuaciones de equilibrio (2.1) y (2.2) en el caso en que se anulen las fuerzas externas $\mathfrak{Z}_\alpha$ y $\mathfrak{Z}$. Por otra parte las constantes de la integración (2.16) no se obtienen trivialmente de las ecuaciones propuestas en las publicaciones que fueron antes citadas.

Otra característica importante de nuestra ecuación es el hecho de que la solución proporciona directamente los esfuerzos de membrana asociados a fuerzas externas arbitrarias $\mathfrak{Z}_\sigma$ y $\mathfrak{Z}$. En las referencias (3) y (6), la ecuación diferencial aparece después que se ha obtenido una solución particular del sistema (2.1). En las referencias (7) y (8) la ecuación diferencial parcial substituye al sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2), como en este trabajo, pero las fuerzas externas no son arbitrarias como en la ecuación (2.15).

Indicamos también que la ecuación (2.15) tiene la ventaja (como en la referencia 8) de estar expresada en un sistema coordenado arbitrario puesto que hemos utilizado notaciones tensoriales.

3. CONDICIONES A LA FRONTERA

En las aplicaciones de la teoría de la membrana es necesario conocer las condiciones de equilibrio en uno o más bordes de la superficie. En la frontera del cascarón el equilibrio se establece entre esfuerzos de la superficie y esfuerzos externos que la mantienen en equilibrio.

La condición de equilibrio en los bordes se expresa por la ecuación

$$T^{\alpha\beta} N_\beta = t^\alpha , \tag{3.1}$$

en donde $T^{\alpha\beta}$ es el tensor de esfuerzos de la superficie en la frontera, N_β es el vector unitario sobre la superficie, perpendicular a la frontera, y t^α son las componentes contravariantes del esfuerzo externo por unidad de longitud de arco que debe aplicarse para mantener la frontera en equilibrio.

Vamos a estudiar a continuación la forma que adquiere la condición de equilibrio (3.1) en términos del formalismo introducido en la sección 2.

Al utilizar la expresión (2.10) en la condición de equilibrio (3.1) ésta se transforma en la ecuación

$$T N^\alpha + F\sqrt{-K}\, d^{\alpha\beta} N_\beta = \frac{\mathfrak{F}}{2K} b^{\alpha\beta} N_\beta + t^\alpha \tag{3.2}$$

Separamos esta ecuación vectorial en sus partes normal y tangencial al borde y encontramos entonces

$$T + F\sqrt{-K}\, N_\alpha d^{\alpha\beta} N_\beta = \frac{\mathfrak{F}}{2K} N_\alpha b^{\alpha\beta} N_\beta + N_\alpha t^\alpha \tag{3.3}$$

y

$$F N_\alpha b^{\alpha\beta} N_\beta = \frac{\mathfrak{F}}{2\sqrt{-K}} N_\alpha d^{\alpha\beta} N_\beta + t^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} N^\beta \tag{3.4}$$

Estas dos ecuaciones permiten conocer en general el valor en la frontera de los escalares T y F en función de

a) la componente normal a la superficie de la fuerza externa por unidad de área $\mathfrak{F}$.

b) los esfuerzos externos t^α que equilibran el corte.

c) las geometrías de la superficie y del borde.

Despejando T y F de (3.3) y (3.4) se deducen

$$F = \left[\frac{\mathfrak{J}}{2\sqrt{-K}} N_\alpha d^{\alpha\beta} N_\beta + t^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} N^\beta \right] / N_\alpha b^{\alpha\beta} N_\beta \tag{3.5}$$

y

$$T = \frac{\mathfrak{J}}{2K} N_\alpha b^{\alpha\beta} N_\beta + N_\alpha t^\alpha - F\sqrt{-K}\, N_\alpha d^{\alpha\beta} N_\beta \quad . \tag{3.6}$$

Se observa que el valor de F en el borde no depende de la componente de t^α normal a la curva frontera.

No siempre es posible despejar los escalares T y F para obtener las ecuaciones (3.5) y (3.6). Se presenta el caso particular cuando N^α satisface la igualdad

$$N^\alpha b_{\alpha\beta} N^\beta = 0 \quad . \tag{3.7}$$

En este caso la ecuación (3.4) se reduce a la condición

$$\frac{\mathfrak{J}}{2\sqrt{-K}} N_\alpha d^{\alpha\beta} N_\beta + t^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} N^\beta = 0 \quad , \tag{3.8}$$

que es ahora independiente de los escalares T y F y determina la componente tangencial del esfuerzo externo t^α en función de $\mathfrak{J}$ y de la geometría. Además la ecuación (3.3) no es ahora suficiente para determinar los dos invariantes T y F en la frontera. La ecuación (3.7) se satisface cuando el vector N^α está en la dirección de una línea asintótica[1]. Como las líneas asintóticas forman un sistema ortogonal en las superficies mínimas, encontraremos este caso en todo punto donde la frontera coincida con o sea tangente a una línea asintótica.

Algunos problemas asociados a la solución de la ecuación diferencial parcial (2.4) requieren de la especificación en la frontera no sólo del valor de F sino también de la componente del gradiente de F perpendicular a la frontera,

$$F_{,\alpha} N^{\alpha} \ . \tag{3.9}$$

Queremos indicar la manera de encontrar esta cantidad a partir del conocimiento de los dos invariantes F y T en la frontera, dados por las ecuaciones (3.5) y (3.6).

Las derivadas de F y T respecto a la longitud de arco a lo largo del borde satisfacen las ecuaciones

$$\frac{dF}{ds} = F_{,\alpha}\, \epsilon^{\alpha\beta} N_{\beta} \tag{3.10}$$

$$\frac{dT}{ds} = T_{,\alpha}\, \epsilon^{\alpha\beta} N_{\beta} \ . \tag{3.11}$$

La primera nos permite conocer la componente tangencial del gradiente de F. La segunda será utilizada para deducir otra componente del gradiente.

Puesto que en el borde se satisface la ecuación de equilibrio (2.13) podemos substituírla en (3.11) y deducir la ecuación

$$- \frac{dT}{ds} + \left[F_{\alpha} + \left(\frac{\mathfrak{J}}{2K} \right)_{,\gamma} b^{\gamma}_{\alpha} \right] \epsilon^{\alpha\beta} N_{\beta} = F_{,\alpha}\, b^{\alpha\beta} N_{\beta} \tag{3.12}$$

La cantidad $F_{,\alpha}\, b^{\alpha\beta} N_{\beta}$ es proporcional a una componente del gradiente de F. El factor de proporcionalidad y la dirección de dicha componente se pueden encontrar expresando $b^{\alpha\beta}$ y N_{β} en función de los vectores propios de $b^{\gamma\beta}$ o en otra forma similar. La componente (3.12) será proporcional a la componente tangencial (3.10) únicamente cuando N_{β} esté dirigido a lo largo de una línea asintótica.

En los otros casos, la componente (3.9) podrá obtenerse como combinación lineal de (3.10) y (3.12). La cantidad (3.12) será proporcional a (3.9) cuando el vector unitario N^{α} apunte en una dirección principal de la superficie[1]

$$b^{\alpha\beta} N_{\beta} = \pm \sqrt{-K}\, N^{\alpha} \tag{3.13}$$

y el factor de proporcionalidad en valor absoluto será entonces

$$\sqrt{-K} \ . \tag{3.14}$$

Con frecuencia se presentan dos posibilidades para establecer el equilibrio en la frontera:

1) Se especifican los esfuerzos deseados t^{α} en la curva frontera y se obtiene el tensor $T^{\alpha\beta}$ que satisfaga las ecuaciones de equilibrio de la sección precedente y las condiciones a la frontera.
2) Se determina alguna solución $T^{\alpha\beta}$ de las ecuaciones de equilibrio en el interior de la superficie y, dada la curva frontera, se deducen entonces de (3.1) las componentes t^{α} necesarias para equilibrar el borde.

Esta segunda posibilidad es más ingenua y su carácter particular la hace inconveniente desde el punto de vista teórico pues impide fijar libremente las componentes t^{α}.

DISCUSION

Se ha obtenido una generalización tensorial de las matrices de Pauli. Los cuatro tensores que constituyen la generalización se expresan en función de cantidades usuales de geometría diferencial de superficies. Intervienen en su definición, tanto cantidades ligadas con la geometría intrínseca de la superficie, las cuales pueden expresarse en función del tensor métrico, como también cantidades relacionadas con la forma de la superficie en el espacio de tres dimensiones, que dependen también de la segunda forma fundamental.

El uso de esta base es recomendable en problemas donde aparecen tensores de segundo orden definidos sobre una superficie.

El caso típico donde este formalismo puede rendir muchos frutos es la teoría elástica de cascarones. En particular, la teoría de la membrana se simplifica al expresar el tensor de esfuerzos en términos de la base de tensores tipo Pauli.

Hemos utilizado, como ejemplo, la teoría de la membrana de superficies mínimas debido a simplificaciones formales dignas de tomarse en cuenta.

Analicemos ahora el caso más general de una superficie arbitraria (no necesariamente mínima) para ver las diferencias con nuestro ejemplo.

1. El tensor de esfuerzos en la base de tensores tipo Pauli es función de tres escalares.
2. La ecuación (2.2) se convierte en una ecuación lineal entre dos de los escalares, que permite expresar uno de ellos en función del otro.
3. Al substituir el tensor de esfuerzos, función ahora de dos escalares independientes, en la ecuación (2.1) nos conduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales, lineales, expresado en notación tensorial. Este sistema depende de los gradientes de los dos escalares y en general, depende también de los escalares mismos; por lo tanto, no será siempre inmediata la transformación a una ecuación diferencial parcial de segundo orden para uno de los escalares.
4. Las condiciones a la frontera permitirán especificar en general los dos escalares independientes que determinan el tensor de esfuerzos en el borde.
5. Los casos patológicos estarán siempre asociados a las líneas asintóticas de la superficie. Para las superficies elípticas, donde las líneas asintóticas no son reales, la teoría carecerá de las excepciones asociadas a las direcciones asintóticas.

Hemos visto que la selección de la clase de superficies mínimas tiene las siguientes características adicionales.

1. Uno de los tres escalares está determinado por la ecuación (2.2). Es decir, la base se adapta mejor al problema que en el caso general.
2. El sistema de ecuaciones diferenciales obtenido depende únicamente de dos gradientes y la transformación a una ecuación diferencial parcial de segundo orden es sencilla.
3. El tratamiento empleado permite suprimir varios inconvenientes encontrados cuando se considera la teoría de la membrana de superficies mí-

nimas por los métodos usuales[8]. En particular, es posible especificar condiciones a la frontera que se adaptan a las formas más conocidas encontradas en los teoremas de existencia y en los métodos de solución numérica.

Creo que una extensión interesante al presente trabajo podría encontrarse al obtener una generalización semejante para las matrices de Dirac en un espacio Riemanniano de cuatro dimensiones. Esta generalización sería de interés para la formulación de la ecuación de Dirac en relatividad general, al relacionarla a los problemas de inmersión de métricas Riemannianas en espacios pseudoeuclideanos.

REFERENCIAS

1. A.J. McConnell, Applications of Tensor Analysis. Dover Publications, New York. 1957.
2. L.P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications, New York 1960.
3. A.E. Green y W. Zerna, Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford 1960.
4. R. Courant y D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics. Vol. II, Interscience Publishers, London 1962.
5. V.I. Smirnov, Integral Equations and Partial Differential Equations. Addison-Wesley, Massachusetts 1964.
6. W. Zerna, Z. Angew, Math. Mech. *31*, (1951) 272.
7. A. Pücher, Beton u. Eisen *33*, (1934) 298.
8. E. Piña, Rev.Mex.Fís. XVII, (1968) 163.
9. V.V. Novoshilov, The theory of Thin Shells. P. Noordhoff Ltd., Groningen 1959.