

## Sobre la relación entre las distribuciones de los tamaños de poros y partículas del suelo

A. López-Lambraño

*Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California, Unidad Ensenada, Km. 103 Carretera Tijuana- Ensenada, Ensenada, Baja California.*

*HIDRUS S.A. DE C.V., México.*

*e-mail: altoti@gmail.com*

C. Fuentes

*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnahuac 8532, Progreso, 62550 Jiutepec, Morelos, México.*

A. López-Ramos

*Escuela de Ingenierías y Arquitectura, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Montería, Cra 6 No 97A-99, Montería, Córdoba, Colombia.*

Received 2 November 2017; accepted 4 January 2018

Las curvas porosimétrica y granulométrica del suelo son relacionadas bajo el supuesto de una relación de vacíos constante en las diferentes escalas y una relación entre los tamaños de poro y partícula en un empaquetamiento dado. En la relación entre los tamaños de poro y partícula se hace intervenir un factor de alargamiento de las partículas basado en el modelo de Arya y Paris o un factor de tortuosidad de las trayectorias de flujo basado en el modelo de Fuentes. Puesto que la curva porosimétrica está asociada a una curva de retención de humedad del suelo, la relación propuesta puede ser utilizada para estimar esta última a partir de la curva granulométrica. La relación entre las curvas es validada en algunos suelos reportados en la literatura, con buenos resultados.

*Descriptor:* Porosidad areal; porosidad volumétrica; relación fractal área-volumen; factor de tortuosidad; probabilidad conjunta.

The particle and void sizes distributions of the soil are related with the assumption that a void constant relationship at all different scales and a relationship between pore and particle size of a given packing. In the relationship between pore and particle sizes, a particle elongation factor is applied based on the Arya and Paris model. A flow trajectory tortuosity factor based on the Fuentes model can also be applied. Since the void size distribution is associated to the soil water retention curve, the proposed relationship can be used to estimate this curve from particle size distribution.

*Keywords:* Areal porosity; volumetric porosity; fractal area-volume relationship; tortuosity factor; joint probability.

PACS: 47.56.+r; 92.40.km; 92.40.Cy.

### 1. Introducción

La curva de retención de humedad, que relaciona la carga de presión del agua en el suelo con el contenido de agua, y la curva de conductividad hidráulica, que relaciona la conductividad hidráulica con el contenido de agua, son de fundamental importancia en el estudio de las transferencias de agua en el suelo. Debido a que la determinación de estas curvas generalmente consume tiempo y es costosa, se han propuesto métodos indirectos de estimación; la curva de conductividad hidráulica se estima a partir de la curva de retención de humedad a través de modelos capilares, y la curva de retención a partir de propiedades más accesibles del suelo como la curva granulométrica, densidad volumétrica y contenido de materia orgánica, entre otras. Nuestro interés en este trabajo es establecer posibles relaciones entre las curvas de retención de humedad y granulométrica.

La curva de retención  $\theta(\psi)$  induce una curva porosimétrica,  $F_v(R)$ , ya que la carga de presión del agua en el suelo ( $\psi$ ) está asociada a un radio ( $r$ ) o diámetro ( $R$ ) equivalente de poro a través de la ley de Laplace:

$$|\psi| = \frac{\lambda_L^2}{r} \cos(\alpha_c), \quad (1)$$

en donde la escala capilar está definida por  $\lambda_L = \sqrt{2\sigma/\rho_w g}$  [1],  $g$  es la aceleración gravitacional,  $\rho_w$  es la densidad del agua y  $\sigma$  es la tensión en la interfaz agua-aire, a una temperatura de 20°C :  $\lambda_L \cong 0.3860$  cm;  $\alpha_c$  es el ángulo de contacto formado entre la interfaz y las partículas sólidas, asumido generalmente constante e igual a cero.

Las curvas porosimétrica y granulométrica se han ligado mediante una relación de similitud y una relación entre los tamaños de poros y partículas del suelo [2–6].

En el modelo de Arya y Paris [2], la curva granulométrica  $F_s(D)$  es discretizada en clases, de modo que la clase  $i$ -ésima, representada por el diámetro equivalente de partícula  $D_i$ , contiene una masa  $\Delta F_{si}$  y un número de partículas  $\Delta N_{si} = 6\Delta F_{si}/\pi\rho_0 D_i^3$ , donde la densidad de partículas ( $\rho_0$ ) es asumida constante. Considerando que la relación de vacíos en cada clase es constante e igual al valor macroscópico y que el espacio poroso en cada clase puede ser representado por un tubo cilíndrico de diámetro  $R$  y longitud  $D_i\Delta N_{si}$ , ellos deducen la relación entre  $R$  y  $D$  siguiente:

$$R_i = D_i \sqrt{\frac{2}{3}} e^{(\Delta N_{si})^{1-\alpha}}, \quad (2)$$

en donde  $(\Delta N_{si})^{1-\alpha}$ , con  $\alpha \geq 1$ , es un factor de alargamiento que resulta de la consideración de que cada una de las partículas contribuye más a la longitud que el diámetro de una esfera equivalente; estos autores recomiendan el valor medio de  $\alpha = 1.38$ , obtenido mediante la calibración del modelo sobre algunos suelos.

Haverkamp y Parlange [7], hacen la observación fundamental de que la relación entre  $R$  y  $D$  de Arya y Paris [2], proporcionada por la Ec. (2), no es única ya que depende del número de clases; este hecho puede verse fácilmente cuando la curva es discretizada de modo que cada clase contenga la misma cantidad de la masa unitaria de suelo  $\Delta F_i = 1/N_c$  con  $i = 1, 2, \dots, N_c$ , donde  $N_c$  es el número de clases; en tal situación  $\Delta N_{si} = (6/\pi\rho_0 D_i^3)$ . Como alternativa Haverkamp y Parlange [3] proponen una relación lineal entre  $D$  y  $R$ , la cual aplican en algunos suelos arenosos con buenos resultados:

$$D = \gamma_{HP} (R/2), \quad (3)$$

donde  $\gamma_{HP}$  es un coeficiente de empaquetamiento.

En el análisis realizado por Hwang y Powers [6], en suelos arenosos del catálogo UNSODA [8], se utiliza la ley potencial, estudiada por Rouault y Assouline [9]:

$$D = u (R/2)^v, \quad (4)$$

donde  $u$  y  $v$  son parámetros empíricos a determinar. Los autores señalan que la relación lineal es insuficiente incluso en suelos arenosos, ya que  $v$  es definitivamente diferente de la unidad.

El objetivo del presente trabajo es el establecimiento de algunas posibles relaciones entre los tamaños de poros y partículas del suelo basadas en los modelos de medio poroso propuestos por Arya y Paris [2], y Fuentes [4, 5].

## 2. Teoría

Se acepta la hipótesis de que la curva granulométrica  $F_s(D)$  y la curva porosimétrica  $F_v(R)$  admiten las funciones densidades  $f_s(D)$  y  $f_v(R)$ , y que el número de partículas  $N_s(D)$  y el número de poros  $N_v(R)$  admiten las funciones densidades  $n_s(D)$  y  $n_v(R)$ , definidas de manera que [10]:

$$N_s(D) = \int_D^\infty n_s(r) dr, \quad (5)$$

$$F_s(D) = \int_0^D f_s(r) dr, \quad (6)$$

$$N_v(R) = \int_R^\infty n_v(r) dr, \quad (7)$$

$$F_v(R) = \int_0^R f_v(r) dr, \quad (8)$$

las funciones  $F_s(D)$  y  $F_v(R)$  se encuentran normalizadas, es decir  $F_s(\infty) = 1$  y  $F_v(\infty) = 1$ .

Las funciones densidades  $f_s(D)$  y  $n_s(D)$  pueden relacionarse entre sí, considerando que el volumen de partículas en el intervalo  $(D - dD/2, D + dD/2)$  es proporcionado por:

$$dV_s(D) = \left(\frac{\pi}{6}\right) H_s^3 f_s(D) dD = \left(\frac{\pi}{6}\right) D^3 n_s(D) dD, \quad (9)$$

donde  $(\pi/6) H_s^3 = V_{st} = M_t/\rho_0$  es el volumen total de las partículas en una unidad de masa de suelo seco ( $M_t = 1$ ); el volumen total del suelo ( $V_t$ ) está definido de modo que  $(\pi/6) H_t^3 = V_t = M_t/\rho_t$ , donde  $\rho_t$  es la densidad del suelo seco.

Una relación análoga puede ser obtenida entre las funciones densidades  $f_v(R)$  y  $n_v(R)$  del espacio poroso, a saber:

$$dV_v(R) = \left(\frac{\pi}{6}\right) H_v^3 f_v(R) dR = \left(\frac{\pi}{6}\right) R^3 n_v(R) dR, \quad (10)$$

donde  $(\pi/6) H_v^3 = V_{vt}$  es el volumen total de los vacíos en una unidad de masa de suelo.

### 2.1. Relación de similitud

La consideración de una relación de vacíos constante se traduce en:

$$e = \frac{V_{vt}}{V_{st}} = \frac{dV_v}{dV_s}, \quad (11)$$

de donde  $dV_v/V_{vt} = dV_s/V_{st}$ , lo que permite establecer la relación de similitud entre las curvas porosimétrica y granulométrica:

$$F_v(R) = F_s(D). \quad (12)$$

### 2.2. Relación entre los tamaños de poros y partículas

#### 2.2.1. Modelo I

Se puede argumentar una relación entre  $D$  y  $R$  a partir de la aplicación de los conceptos de tortuosidad de las trayectorias de flujo y de la geometría fractal.

El factor de tortuosidad en las trayectorias de flujo se define como  $T = dL_f/dL$ , donde  $L$  es la trayectoria rectilínea y  $L_f$  la trayectoria real en el medio poroso. Considérese un empaquetamiento de partículas y poros cuyos diámetros equivalentes se encuentran incluidos respectivamente en los intervalos  $(D - (dD/2), D + (dD/2))$  y  $(R - (dR/2), R + (dR/2))$  y en número  $n_s(D) dD = -dN_s(D)$  y  $n_v(R) dR = -dN_v(R)$ ; puesto que las partículas están ubicadas en todas las direcciones, se denotan por  $T_x = dx_f/dx$ ,  $T_y = dy_f/dy$  y  $T_z = dz_f/dz$  los factores de tortuosidad en las tres direcciones; un valor medio del factor de tortuosidad se obtiene haciendo  $(dL)^3 = dx dy dz$  y  $(dL_f)^3 = dx_f dy_f dz_f$ , es decir  $T^3 = T_x T_y T_z$ . Es claro que  $T^3$  representa la razón entre

los volúmenes ‘tortuoso’ ( $dV_f$ ) y físico ( $dV$ ) del paquete, es decir  $dV_f/dV = T^3$ .

El volumen físico del paquete ( $dV$ ) se relaciona con el volumen de los sólidos por  $dV = (H_t/H_s)^3 dV_s$ , y de acuerdo con la Ec. (9) se tiene  $dV(\mathfrak{R}, D) = (\pi/6) \mathfrak{R}^3 n_s(D) dD$ , donde  $\mathfrak{R} = H_t(D/H_s)$ . Esto quiere decir que el paquete puede ser caracterizado por esferas de diámetro equivalente  $\mathfrak{R}$  en un número igual al de las partículas; la fase sólida es la que define la estructura del suelo. El volumen tortuoso del paquete ( $dV_f$ ) puede ser caracterizado por las mismas esferas de diámetro equivalente  $\mathfrak{R}$ , pero en número igual al de los poros ya que las trayectorias de flujo ocurren en el interior de los mismos, o sea  $dV_f(\mathfrak{R}, R) = (\pi/6) \mathfrak{R}^3 n_v(R) dR$ . Se tiene  $dV/dN_s = dV_f/dN_v$ , es decir:

$$T^3(R) = \frac{n_v(R) dR}{n_s(D) dD}. \tag{13}$$

La combinación de las Ecs. (9), (10) y (11) permite obtener la relación entre  $R$  y  $D$  siguiente [5]:

$$R = \frac{D}{T(R)} \sqrt[3]{e} \tag{14}$$

Se ha argumentado que el factor de tortuosidad sigue una ley potencial [5, 11]:

$$T(R) = T_v \left( \frac{H_v}{R} \right)^{2s-1}, \quad (1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1, \tag{15}$$

donde  $T_v$  es un factor de tortuosidad de referencia;  $s$  es una función de la porosidad, de modo que  $s \rightarrow 1/2$  cuando  $\phi \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow 1$  cuando  $\phi \rightarrow 1$ , y está definido como  $s = D_f/3$ , donde es la dimensión fractal de la superficie de las partículas o de la interfaz entre partículas y poros.

Las Ecs. (14) y (15) proporcionan la siguiente relación entre  $D$  y  $R$ :

$$D = T_v e^{-\frac{1}{3}} H_v^{2s-1} R^{2(1-s)} \tag{16}$$

Como ilustración, la curva de retención de Brooks y Corey [12], proporciona  $F_v(R) = (R/R_b)^\lambda$  donde  $\lambda \geq 0$ , y de las Ecs. (12) y (16) se deduce:

$$F_s(D) = \left( \frac{D}{D_b} \right)^\Lambda, \quad \lambda = 2(1-s)\Lambda, \tag{17}$$

$$D_b = T_v e^{-\frac{1}{3}} H_v^{2s-1} R_b^{2(1-s)}, \tag{18}$$

con  $\lambda < \Lambda$ . Así, en principio los parámetros  $\lambda$  y  $\psi_b$  de la curva de retención de Brooks y Corey pueden ser estimados a partir de la curva granulométrica usando las Ecs. (17) y (18) siempre y cuando el parámetro  $T_v$  sea conocido.

Es claro que el factor de tortuosidad induce una relación específica entre  $D$  y  $R$ , una ley en potencia de  $T(R)$  induce una relación en potencia entre  $D$  y  $R$ . Enseguida se investigan otras posibles relaciones para describir el factor de tortuosidad a partir de una reconceptualización del modelo de Arya y Paris.

### 2.2.2. Modelo II

En el modelo discreto de Arya y Paris el volumen de los vacíos es definido mediante la asimilación del espacio poroso a un tubo cilíndrico con una sección diferente en cada clase de partículas. En la adaptación de esta idea en el modelo presentado por Fuentes [4], se introduce la función densidad de la longitud de las partículas  $\ell_s(D)$ :

$$\ell_s(D) = D n_s(D), \tag{19}$$

de modo que la longitud de las partículas con diámetros mayores que  $D$ ,  $L_s(D)$ , queda definida por:

$$L_s(D) = \int_D^\infty \ell_s(r) dr. \tag{20}$$

El volumen de los vacíos quedaría definido por  $dV_v(R) = (\pi/4) R^2 \tau(D) \ell_s(D) dD$ , donde se ha introducido el factor  $\tau(D)$  para alargar el diámetro de las partículas. La relación entre  $R$  y  $D$  se deduce considerando las Ecs. (9) y (11):  $R = D \sqrt{2e/3\tau(D)}$ ; el factor  $2/3$  viene de la transformación de una esfera a un tubo cilíndrico y de hecho puede ser asimilado en  $\tau(D)$ . Para ello, se introduce la función densidad de la longitud de los poros de manera análoga a la Ec. (19):

$$\ell_v(R) = R n_v(R), \tag{21}$$

de modo que la longitud de los poros de diámetros mayores que  $R$ ,  $L_v(R)$ , es proporcionada por:

$$L_v(R) = \int_R^\infty \ell_v(r) dr. \tag{22}$$

El factor de alargamiento  $\tau(D)$  se define como:

$$\tau(D) = \frac{dL_v}{dL_s} = \frac{\ell_v(R) dR}{\ell_s(D) dD}. \tag{23}$$

Con las Ecs. (21) y (23), la Ec. (10) se escribe como  $dV_v(R) = (\pi/6) R^2 \tau(D) \ell_s(D) dD$ . La relación entre  $R$  y  $D$  resultante es la siguiente:

$$R = D \sqrt{\frac{e}{\tau(D)}}. \tag{24}$$

Esta relación es solamente conceptual ya que se desconoce  $\tau(D)$ , razón por la cual es necesario investigar las posibles funciones que puedan representar la dependencia del factor de alargamiento con respecto al diámetro de partícula o de poro.

La combinación de las Ecs. (14) y (24) proporciona una relación entre los factores de alargamiento y tortuosidad:

$$\tau(D) = e^{\frac{1}{3}} T^2(R), \tag{25}$$

y utilizando las Ecs. (15) y (16) se deducen las leyes en potencia siguientes:

$$\tau(R) = \tau_v \left( \frac{H_v}{R} \right)^{3\gamma}, \quad \gamma = \frac{2}{3}(2s - 1), \quad (26)$$

$$\tau(D) = \tau_s \left( \frac{H_s}{D} \right)^{3\beta}, \quad \beta = \frac{2s - 1}{3(1 - s)}, \quad (27)$$

donde  $\tau_v = e^{1/3} T_v^2 = e^{\gamma/2} \tau_s^{1-(3\gamma/2)}$  y  $1 - (3\gamma/2) = 1 / (1 + (3\beta/2))$ . Se debe notar que la Ec. (27) corresponde a la Ec. (2) en el modelo original de Arya y Paris si la discretización de la curva granulométrica es realizada con  $\Delta F_{si} = \Delta F_s = const.$  y  $\beta = \alpha - 1$ , es decir  $\tau_s = (3/2) (\Delta F_s)^\beta$  y  $T_v = (3e^{-1/3}/2)^{1-s} (\Delta F_v)^{(2s-1)/3}$ .

Se puede establecer otra expresión del factor de alargamiento aceptando que  $\tau(D)$  es proporcional a  $\ell_s^\beta(D)$ , es decir  $\tau(D) = \kappa_s [Dn_s(D)]^\beta$ , donde  $\kappa_s$  es un coeficiente adimensional y  $\beta = \alpha - 1$  [4]. Sin embargo esta expresión presenta algunos inconvenientes, por ejemplo para la ecuación de Brooks y Corey [12], se deduce de las Ecs. (9), (12) y (24)  $\Lambda = \lambda(2 + 3\beta) / (2 + \lambda\beta)$ . Ahora bien, las curvas de retención y granulométrica en el catálogo de suelos GRIZZLY [13], están representadas por ecuaciones de van Genuchten [14] cuyo comportamiento en los diámetros pequeños es similar a la ecuación de Brooks y Corey; los resultados muestran que estadísticamente  $\lambda < \Lambda$ . Esta desigualdad sólo se cumpliría para  $\lambda \leq 3$ , a menos que en  $\Lambda/\lambda$  se elimine la dependencia con respecto a  $\lambda$ .

Para corregir este inconveniente se propone  $\tau(D) = \kappa_s [Dn_s(D)]^\beta [F_s(D)]^{-c}$ , la cual permite obtener  $\Lambda = \lambda(2 + 3\beta) / [2 + \lambda(\beta - c)]$ , que satisface  $\lambda \leq \Lambda$  si  $c = \beta$ . La expresión para el factor de alargamiento toma la forma siguiente:

$$\tau(D) = \kappa_s \left[ \frac{Dn_s(D)}{F_s(D)} \right]^\beta. \quad (28)$$

La relación  $\Lambda = \lambda [1 + (3/2)\beta]$  también es obtenida de la Ec. (28) si en lugar de  $F_s(D)$  se utiliza  $Df_s(D)$ , pero en tal caso, en virtud de la Ec. (9), el resultado es equivalente al ya indicado por la Ec. (27), es decir  $\tau(D) = \tau_s (H_s/D)^{3\beta} = \tau_s [n_s(D)/f_s(D)]^\beta$ .

La Ec. (28), considerando la Ec. (9) y la pendiente en escala log-log de la curva granulométrica definida por [4]:

$$\xi_s(D) = \frac{d \ln(F_s)}{d \ln(D)}, \quad (29)$$

toma la forma:

$$\tau(D) = \tau_s(D) \left( \frac{H_s}{D} \right)^{3\beta}, \quad \tau_s(D) = \kappa_s [\xi_s(D)]^\beta, \quad (30)$$

la cual contiene a la Ec. (27) tomando a  $\tau_s(D)$  como una constante.

El sistema de Ecs. (12), (24), (27) y (30) constituye una relación entre las curvas porosimétrica y granulométrica; si se propone una representación analítica de alguna de ellas

la otra queda definida por este sistema. Si se proporciona  $F_s(D)$ , la curva porosimétrica  $F_v(R)$  queda representada como  $F_v = F_s(D)$  y  $R = R(D)$ , en donde la relación entre  $R$  y  $D$  se obtiene de las Ecs. (24) y (30):

$$R = \left( \sqrt{e [\tau_s(D)]^{-1} H_s^{-3\beta}} \right) D^{1+\frac{3}{2}\beta}. \quad (31)$$

Cuando se proporciona la curva porosimétrica el sistema de ecuaciones permite obtener la expresión que define, con  $\beta > 0$ , la curva granulométrica:

$$\int_0^{F_s} [R(F_v)]^{\frac{2}{\beta}} F_v^{-1} dF_v = \frac{\beta}{2+3\beta} \left( \frac{e}{\kappa_s H_s^{3\beta}} \right)^{\frac{1}{\beta}} D^{\frac{2}{\beta}+3}, \quad (32)$$

donde  $R(F_s)$  representa la función inversa de  $F_s(R)$ .

### 2.2.3. Modelo III

Otra relación posible entre el factor de alargamiento y las funciones de distribución de los poros análoga a la Ec. (27), es:

$$\tau(R) = \kappa_v \left[ \frac{Rn_v(R)}{F_v(R)} \right]^\gamma. \quad (33)$$

Esta última, en virtud de la Ec. (10), puede ser escrita como:

$$\tau(R) = \tau_v(R) \left[ \frac{H_v}{R} \right]^{3\gamma}, \quad \tau_v(R) = \kappa_v [\xi_v(R)]^\gamma, \quad (34)$$

donde  $\xi_v(R)$  es la pendiente en escala log-log de la curva porosimétrica definida por:

$$\xi_v(R) = \frac{d \ln(F_v)}{d \ln(R)}. \quad (35)$$

Es claro que la Ec. (34) contiene la Ec. (26) haciendo  $\tau_v(R)$  una constante.

La relación entre  $D$  y  $R$  correspondiente se obtiene de las Ecs. (24) y (34):

$$D = \left( \sqrt{e^{-1} \tau_v(R) H_v^{3\gamma}} \right) R^{1-\frac{3}{2}\gamma}, \quad (36)$$

con  $0 \leq \gamma \leq 2/3$ .

El sistema de Ecs. (12), (24) y (34) constituye otra relación entre las curvas porosimétrica y granulométrica. Si se proporciona  $F_s(D)$  la curva porosimétrica  $F_v(R)$ , para  $\gamma < 2/3$ , queda definida por:

$$\int_{F_v}^1 [D(F_s)]^{-\frac{2}{\gamma}} F_s^{-1} dF_s = \frac{\gamma}{2-3\gamma} \times \left( \frac{e}{\kappa_v H_v^{3\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} D^{-\frac{2}{\gamma}+3}, \quad (37)$$

donde  $D(F_s)$  representa la función inversa de  $F_s(D)$ . Si se proporciona la curva porosimétrica  $F_v(R)$ , la curva granulométrica queda representada como  $F_s = F_v(R)$

y  $D = D(R)$ , en donde la relación entre  $D$  y  $R$  está definida por la Ec. (32) y (36).

La obtención de formas analíticas cerradas a través de la Ec. (32), modelo II, o de la Ec. (37), modelo III, de  $F_s(D)$  a partir de  $F_v(R)$  en el primer caso, o de  $F_v(R)$  a partir de  $F_s(D)$  en el segundo, no es evidente para funciones más complejas que la función potencial de Brooks y Corey.

En estudios de la transferencia de agua en el suelo, generalmente es la curva de retención la que es representada analíticamente; la curva granulométrica correspondiente es difícil de obtener en forma cerrada a partir de la Ec. (32), sin embargo ella puede ser representada en forma paramétrica con el modelo III. En tal caso se puede utilizar la Ec. (14), modelo I, con el factor de tortuosidad que se obtiene de la combinación de las Ecs. (25) y (33) o (34). Haciendo  $\kappa_t = \sqrt{\kappa_v e^{-1/3}}$ , el factor de tortuosidad toma la forma siguiente:

$$T(R) = \kappa_t \left[ \frac{R n_v(R)}{F_v(R)} \right]^{\frac{(2s-1)}{3}} = \kappa_t [\xi_v(R)]^{\frac{(2s-1)}{3}} \left( \frac{H_v}{R} \right)^{2s-1}, \quad (38)$$

la cual representa una alternativa a la Ec. (13). La representación de la curva granulométrica queda como  $F_s = F_v(R)$  y  $D = D(R)$ , esta última es similar a la Ec. (14), en donde  $T_v$  se reemplaza por:

$$T_v(R) = \kappa_t [\xi_v(R)]^{\frac{(2s-1)}{3}}. \quad (39)$$

2.2.4. Algunas funciones de distribución

Además de la ecuación de Brooks y Corey [12], se han propuesto diversas ecuaciones para representar la curva característica de humedad y en consecuencia la curva porosimétrica, como las de Brutsaert [15], van Genuchten [14], Braddock *et al.* [16] y la distribución log normal. Muchas de estas ecuaciones pueden ser construidas a partir de  $\omega(\rho) = \omega_m \rho^\lambda$ , que se denominará distribución canónica y que tiene la estructura de la ecuación de Brooks y Corey; la escala adimensional está definida por  $\rho = R/R_m$  y  $\omega = \omega(1)$  con  $R_m$  un valor de referencia.

Se puede mostrar a partir de la identidad

$$\omega \equiv \int_0^\omega \omega d \ln(\omega),$$

que la distribución admite una función densidad del logaritmo de las escalas. En efecto, la transformación  $\tau = \ln(\rho)$  permite escribir la distribución canónica como  $\omega(\tau) = \omega_m \exp(\lambda\tau)$  y su densidad  $p(\tau) = d\omega/d\tau = \lambda\omega(\tau)$ , de donde  $d \ln[\omega(\tau)] = \lambda d\tau$  y  $\omega(\tau) = p(\tau)/\lambda$ ; resultados que llevados a la identidad conduce a

$$\omega(\tau) = \int_{-\infty}^\tau p(\tau) d\tau,$$

a la cual se le impone la condición de normalización  $\omega(\infty) = 1$ .

La ecuación de Brutsaert [15], se deduce considerando que la densidad tiene la forma

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \lambda\omega(\tau) [1 - \omega(\tau)],$$

la cual es una distribución logística simétrica, en donde el término  $[1 - \omega(\tau)]$  impide el crecimiento sin bornes de  $\omega(\tau)$ . La ecuación de van Genuchten [14], puede obtenerse a partir de una distribución logística asimétrica

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \lambda\omega(\tau) [1 - \omega^{1/m}(\tau)],$$

donde  $m > 0$  es un parámetro de asimetría, y haciendo  $n = \lambda/m$ . La ecuación de Braddock *et al.* [16], se obtiene a partir de

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \lambda\omega(\tau) \frac{[1 - \omega^{1/m}(\tau)]}{[1 - \varepsilon\omega^{1/m}(\tau)]},$$

a saber:

$$R = R_d \omega^{\frac{1}{\lambda}} \left( 1 - \omega^{\frac{1}{m}} \right)^{-\frac{1}{n}}, \quad (40)$$

donde  $n = \lambda/(1 - \varepsilon)m$  y  $R_d = R_m \omega^{-1/\lambda} (1 - \omega^{1/m})^{1/n}$ . Con  $\varepsilon = 0$  se obtiene la ecuación de van Genuchten y de ésta la de Brutsaert con  $m = 1$ .

La distribución gaussiana fue establecida por A. Einstein en sus estudios de las fluctuaciones de una variable aleatoria a partir de la entropía [18], definida por  $S^*(\tau) = -\ln[\omega(\tau)]$ , de donde  $S_E(\tau) \equiv S^*(0) - S^*(\tau) = \ln[\omega(\tau)/\omega_m]$ . Considerando la distribución canónica se tiene  $p(\tau) = \lambda\omega_m \exp[S_E(\tau)]$ ;  $S_E(\tau)$  es máxima en  $\tau = 0$ , es decir  $S'_E(0) = 0$  y  $S''_E(0) < -\varepsilon < 0$ , de modo que su desarrollo en potencias alrededor de  $\tau = 0$  y hasta el término cuadrático implica  $S^*(\tau) = S^*(0) + (\varepsilon\tau^2/2)$ , y en consecuencia  $p(\tau) = \lambda\omega_m \exp(-\varepsilon\tau^2/2)$ . Esta densidad ha sido establecida para valores pequeños de  $\tau$ , pero en razón de su rápido decrecimiento cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$ , su aplicación puede extenderse sobre todo el dominio de integración, resultando de la normalización  $\varepsilon = 2\pi(\lambda\omega_m)^2$  y por lo tanto  $\omega(\tau) = [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi}\lambda\tau/2)]/2$ , puesto que  $\omega(\tau = 0) = 1/2 = \omega_m$ ;  $\operatorname{erf}(x)$  es la función de los errores. Se tiene:

$$\omega(R) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln \left( \frac{R}{R_m} \right)^\lambda \right] \right\}. \quad (41)$$

La distribución puede ser presentada en su forma usual ya que la variancia geométrica es proporcionada por  $\sigma^2 = 2/\pi\lambda^2$ .

El desarrollo de la densidad de Gauss alrededor de  $\tau = 0$  y hasta el término cuadrático es  $p(\tau) = \lambda\omega_m (1 - (\varepsilon\tau^2/2))$ , este desarrollo corresponde también a la densidad de Cauchy  $p(\tau) = \lambda\omega_m (1 + (\varepsilon\tau^2/2))$ . En esta última la condición de normalización proporciona  $\varepsilon = 2(\pi\lambda\omega_m)^2$  y en consecuencia  $\omega(\tau) = \{1 + [2 \arctan(\pi\lambda\tau/2)/\pi]\}/2$ , ya que  $\omega(\tau = 0) = 1/2 = \omega_m$ . Se tiene

$$\omega(R) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left[ \frac{\pi}{2} \ln \left( \frac{R}{R_m} \right)^\lambda \right] \right\}. \quad (42)$$

Se pueden construir otras funciones de distribución proporcionando la función  $\Phi(\tau)$  en la siguiente perturbación de la distribución canónica:  $d\omega/d\tau = \lambda\omega_m \exp[\lambda\tau - \Phi(\tau)]$ . Con la función  $\Phi(\tau) = \Phi_0 + (\mu e^{\lambda\tau})^{1/p}$  se obtiene  $\omega(\tau) = \gamma\left[(\mu e^{\lambda\tau})^{1/p}; p\right]$  y  $\omega_m \Gamma(1+p) = \mu e^{\Phi_0}$ , donde  $\gamma(x;p)$  es la función gamma incompleta normalizada de variable  $x$  y parámetro  $p$  y  $\Gamma(p)$  es la función gamma (completa) de Euler; cuando  $p = 1/2$  se deduce el caso estudiado por Fuentes [5]:  $\omega(\tau) = \text{erf}(\mu e^{\lambda\tau})$ . En general se tiene:

$$\omega(R) = \gamma\left\{\left[\mu\left(\frac{R}{R_m}\right)^\lambda\right]^{\frac{1}{p}}; p\right\} \quad (43)$$

el parámetro  $\mu$  queda definido por  $\gamma\left(\mu^{\frac{1}{p}}; p\right) = \omega_m$ .

A la función

$$\Phi(\tau) = \Phi_0 + \ln\left[\exp(\mu e^{\lambda\tau})^{1/p} - 1\right] - (\lambda\tau/p)$$

corresponde

$$\omega(\tau) = \zeta_I\left[(\mu e^{\beta\tau})^{1/p}; 1+p\right]$$

y  $\omega_m p \Gamma(1+p) \zeta(1+p) = \mu^{1+(1/p)} e^{\Phi_0}$ , donde  $\zeta_I[x;s]$  es la función zeta incompleta normalizada de variable  $x$  y parámetro  $s$  y  $\zeta(s)$  es la función zeta (completa) de Riemann. Se tiene:

$$\omega(R) = \zeta_I\left\{\left[\mu\left(\frac{R}{R_m}\right)^\lambda\right]^{\frac{1}{p}}; 1+p\right\} \quad (44)$$

el parámetro  $\mu$  queda definido por  $\zeta_I\left(\mu^{\frac{1}{p}}; 1+p\right) = \omega_m$ .

### 3. Aplicaciones

Las características hidrodinámicas de los suelos son de fundamental importancia en los estudios de infiltración, precipitación, evaporación, drenaje y redistribución del agua en el suelo. A continuación se presenta la validación de los modelos fractales de medio poroso de Fuentes I, II y III; en donde se establecen las relaciones entre los tamaños de poros y partículas del suelo. El análisis se extiende de forma expresa a dos grupos de suelos de propiedades conocidas.

#### 3.1. Suelos analizados por Hwang y Powers

En el trabajo de Hwang y Powers [6], se estudia la relación entre las curvas de retención y granulométrica representadas

por una distribución lognormal y aplicada a suelos arenosos. Estas curvas de acuerdo con la Ec. (40) pueden escribirse como:

$$S(\psi) = S_r + \frac{1}{2}(1 - S_r) \times \left\{1 + \text{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln\left(\frac{\psi_m}{\psi}\right)^\lambda\right]\right\}, \quad (45)$$

$$F(D) = F_r + \frac{1}{2}(1 - F_r) \times \left\{1 + \text{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln\left(\frac{D}{D_m}\right)^\Lambda\right]\right\}, \quad (46)$$

donde  $\psi_m$  es la presión asociada a  $R_m$  y  $D_m$ ,  $S = \theta/\theta_s$  es el grado de saturación,  $S_r = \theta_r/\theta_s$ ;  $\theta_s$  y  $\theta_r$  son los contenidos de humedad a saturación y residual, respectivamente. Las desviaciones estándares geométricas correspondientes están definidas por  $\sigma_R = \sigma_\psi = \sqrt{2/\pi}/\lambda$  y  $\sigma_D = \sqrt{2/\pi}/\Lambda$ .

La relación utilizada entre el diámetro de partícula y el radio de poro ( $r = R/2$ ) es la ley potencial definida por la Ec. (4). De las Ecs. (45) y (46) se obtiene  $\sigma_\psi = \sigma_D/v$  o equivalentemente  $\lambda = v\Lambda$ .

La comparación de la Ec. (4) con la Ec. (18) proporciona el siguiente significado de los parámetros  $u$  y  $v$ :

$$u = T_v 2^{2(1-s)} e^{-\frac{1}{3}} H_v^{2s-1}, \quad (47)$$

$$v = 2(1 - s). \quad (48)$$

Los valores medios de los parámetros  $u$  y  $v$  obtenidos en 79 suelos arenosos de la base de datos UNSODA, son los siguientes (Tabla IV de Hwang y Powers, [6]): i) en 40 arenas  $u = 1.380$  y  $v = 0.70$ , ii) 20 arenas francosas  $u = 0.991$  y  $v = 0.69$ , y iii) 19 francos arenosos  $u = 1.618$  y  $v = 0.68$ ;  $D$  y  $R$  están en centímetros. Se debe notar que  $v$  es casi una constante en las tres clases de suelos; de hecho, si se calcula  $v$  a partir de los valores medios de los parámetros  $\sigma_D$  y  $\sigma_\psi$  reportados en la Tabla III de Hwang y Powers [6], que para las tres clases de suelos son respectivamente:  $\sigma_D = 0.635, 0.913, 1.415$  y  $\sigma_\psi = 0.946, 1.360, 2.110$ , se obtiene el valor único de  $v \cong 0.67$ . Con el valor medio de la porosidad de las tres clases de suelos,  $\phi \cong 0.4$ , las Ecs. (13) y (48) predicen el valor de  $v \cong 0.65$ , valor cercano al obtenido precedentemente.

TABLA I. Parámetros característicos de los suelos B, D y F.

Suelo	$\phi$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$s$	$v$	$\kappa$	$\beta = \alpha - 1$	$D_d$ (μm)	$T_v$
B	0.4717	0.6883	0.6234	0.6041	0.4027	220.31	0.0563
D	0.4415	0.6820	0.6360	0.5724	0.3816	277.12	0.0846
F	0.4264	0.6789	0.6422	0.5571	0.3714	300.35	0.1235

TABLA II. Parámetros de la curva de retención de los suelos B, D y F y sus parámetros de calibración  $\tau_s$  y  $T_v$ .

Suelo	$\theta_s$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$R_d$ ( $\mu$ m)	$ \psi_d $ (cm)	$m$	$T_v$
B	0.4645	32.37	92.07	0.0563	0.7996
D	0.4112	29.48	101.07	0.0846	1.1157
F	0.3582	25.08	118.82	0.1235	1.3716

**3.2. Suelos de Arya y Paris**

Para el análisis de los suelos de Arya y Paris [2] se utiliza la distribución definida por la Ec. (40), a la cual corresponde la curva de retención siguiente:

$$\psi = \psi_d \Theta^{-\frac{1}{\lambda}} \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (49)$$

donde  $\Theta = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$  y  $\psi_d$  es la presión asociada a  $R_d$ .

La curva porosimétrica asociada a la Ec. (49), considerando  $\theta_r = 0$ , es:

$$R = R_d F_v^{\frac{1}{\lambda}} \left( 1 - F_v^{\frac{1}{m}} \right)^{-\frac{1}{n}}. \quad (50)$$

La pendiente en escala log-log de la curva porosimétrica se obtiene de la Ec. (50):

$$\xi_v(F_v) = \lambda \left( \frac{1 - F_v^{\frac{1}{m}}}{1 - \varepsilon F_v^{\frac{1}{m}}} \right), \quad (51)$$

con  $\varepsilon = 1 - (\lambda/mn)$ .

La curva granulométrica resultante es la siguiente:

$$D = D_d F_s^{\frac{2(1-s)}{\lambda}} \left( 1 - F_s^{\frac{1}{m}} \right)^{-\frac{2(1-s)}{n}} \left[ \frac{\xi_v(F_s)}{\xi_v(F_{sd})} \right]^{\frac{\gamma_v}{2}}, \quad (52)$$

donde

$$D_d = \kappa_t e^{-\frac{1}{3} H_v^{2s-1}} [\xi_v(F_{sd})]^{\frac{\gamma_v}{2}} R_d^{2(1-s)}, \quad (53)$$

con  $F_{sd} = F_{vd}$  y  $F_{vd}$  definida por

$$F_{vd}^{1/\lambda} \left( 1 - F_{vd}^{1/m} \right)^{-1/n} = 1.$$

La relación entre  $R$  y  $D$  definida por la Ec. (39) corresponde a  $\gamma_v = 2(2s - 1)/3$  en las Ecs. (52) y (53) y la relación definida por la Ec. (16) a  $\gamma_v = 0$  y  $\kappa_t = T_v$ .

La curva de retención definida por la Ec. (49) contiene tres parámetros de forma  $\{\lambda, m, n\}$  y pueden ser reducidos a uno, sin pérdida en la calidad de representación de los datos experimentales. En efecto, haciendo  $\lambda = mn$  las funciones  $\theta(\psi)$  y  $F_v(R)$ , Ecs. (49) y (50), se vuelven explícitas y corresponde la primera a la curva de retención de van Genuchten con dos parámetros de forma  $\{m, n\}$ ; en este caso la función  $F_s(D)$  definida por la Ec. (52) es explícita sólo cuando  $\gamma_v = 0$ . Con una relación entre  $m$  y  $n$  el número de parámetros de forma se reduce a uno  $\{m\}$ ; se acepta aquí la

relación  $m = 1 - (2/n)$  (van Genuchten, [14]; Fuentes *et al.*, [17]).

Los supuestos anteriores son utilizados para el análisis de los suelos B, D y F de Arya y Paris [2]. La densidad de las partículas es tomada como  $\rho_0 = 2.65$  g/cm<sup>3</sup> lo que induce  $H_s = 8965.72$   $\mu$ m. Los valores de los parámetros  $D_d$  y  $m$  son reportados en la Tabla I, así como los valores de la porosidad; se debe observar que los valores predichos del parámetro  $\alpha$  a partir de la porosidad son muy parecidos a los

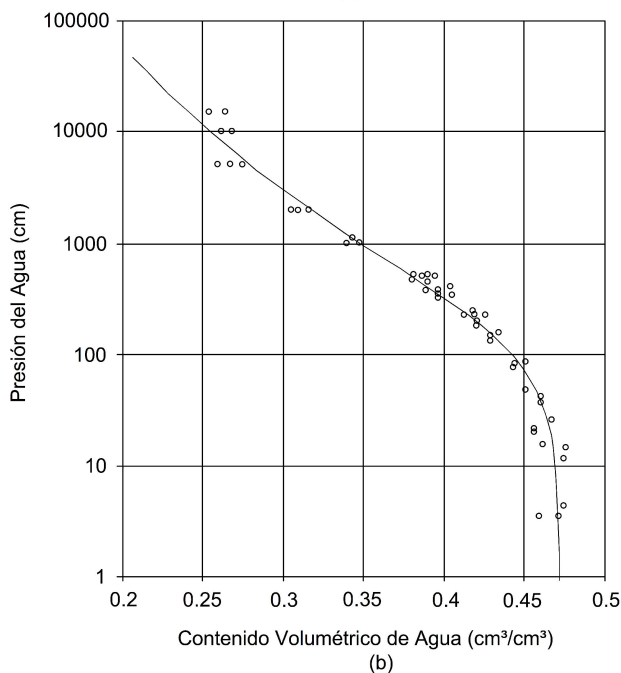
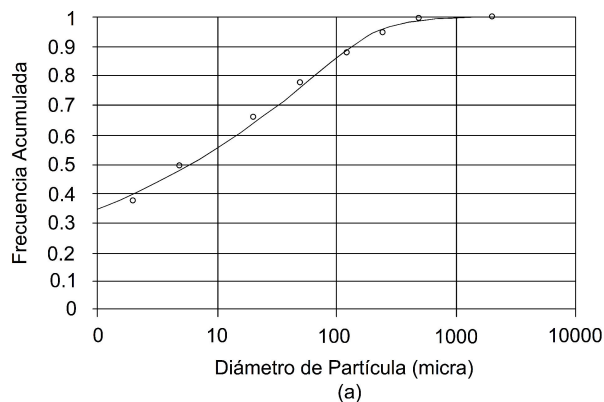


FIGURA 1. Relación entre las curvas (a) granulométrica y (b) de retención de humedad en el suelo B, con  $T_v = 0.7996$ .

obtenidos por Arya y Paris [2], el valor medio teórico  $\alpha_{teo} = 1.385$  ( $\beta_{teo} = 0.385$ ) es bastante cercano al valor de  $\alpha = 1.38$  recomendado por estos autores. El parámetro  $\theta_s$  es tomado de Haverkamp *et al.* [13], y sobre los datos de las curvas de retención es calibrado el parámetro  $\psi_d$  y a partir de éste se obtienen los valores de  $\tau_s$  y  $T_v$  que permiten el paso entre las curvas porosimétrica y granulométrica; los resultados se muestran en la Tabla II.

El parámetro  $\tau_s$  o  $T_v$  fue calibrado de modo de minimizar la suma de cuadrados de los errores entre el contenido de humedad observado y el predicho por el modelo; en la Ec. (9) se ha considerado  $\theta = \theta_s F(D)$ , para poder incluir el efecto del aire atrapado. En las Fig. 1, 2 y 3 se muestra la relación entre las curvas granulométrica y de retención para los suelos utilizados. En (a) se presenta el ajuste de la curva granulométrica del suelo a partir de su función de distribución  $F_s(D)$  definida en la Ec. (52), donde  $F_s(D)$  es la frecuencia acumulada basada en el peso de las partículas, cuyos diámetros son inferiores o iguales a  $D$ . En (b) se muestra la relación entre el contenido volumétrico de agua y la presión del agua, llamada

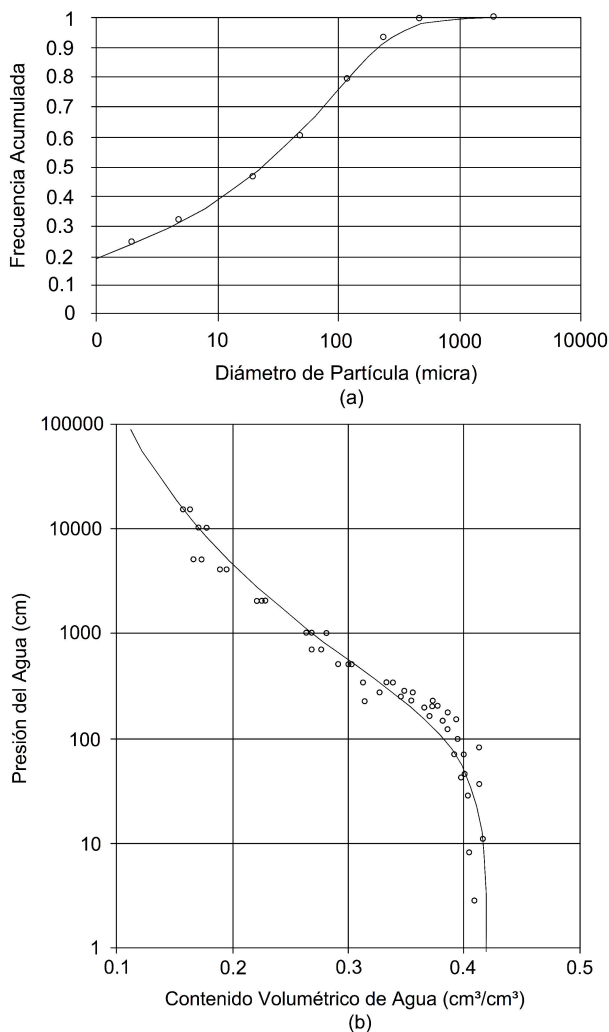


FIGURA 2. Relación entre las curvas (a) granulométrica y (b) de retención de humedad en el suelo D, con  $T_v = 1.1157$ .

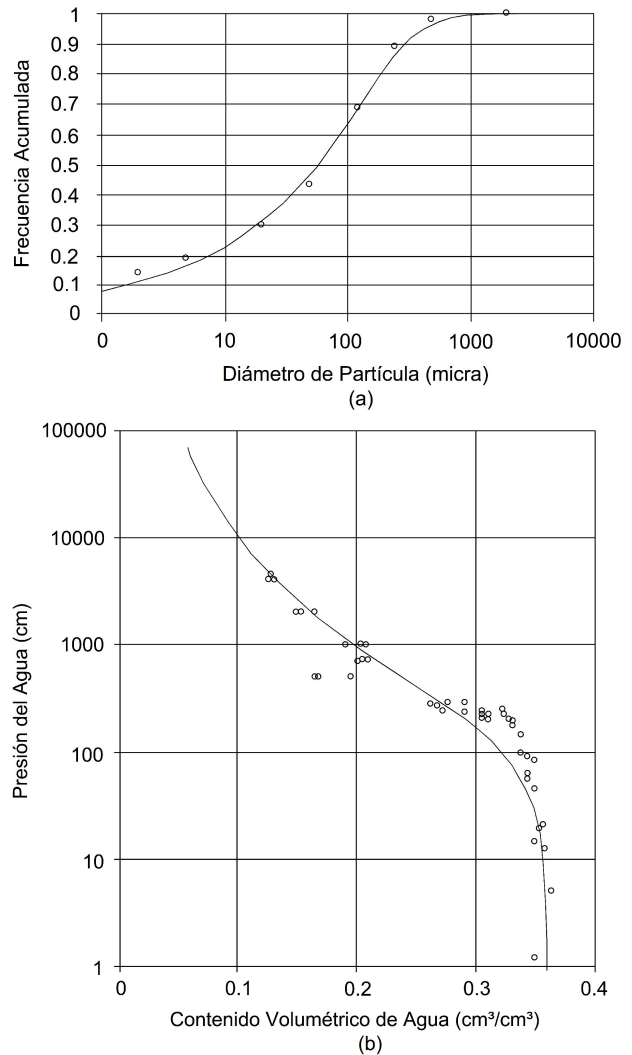


FIGURA 3. Relación entre las curvas (a) granulométrica y (b) de retención de humedad en el suelo F, con  $T_v = 1.3716$ .

curva característica de humedad o curva de retención en el suelo. El potencial de presión por unidad de peso se llama también presión efectiva del agua con respecto a la presión atmosférica o simplemente presión del agua, siendo denotada también por  $h(cm)$  que evoca la altura de una columna equivalente en agua. En un medio no saturado el potencial de presión varía con respecto al contenido de humedad; a medida que la presión aumenta el contenido de humedad se incrementa. El contenido volumétrico cuando los poros contienen agua o porosidad volumétrica parcial es denotado como ( $cm^3/cm^3$ ), es decir volumen de agua por unidad de volumen de suelo y que en un suelo parcialmente saturado es función del potencial de presión del agua en el suelo. La curva característica de humedad es fuertemente afectada por la textura y la estructura del suelo. Por la textura, mientras mayor es el contenido de arcilla mayor es la retención del agua para un valor de la presión y más gradual es la pendiente de la curva, y por la estructura, se afectan los valores altos de presión donde los efectos capilares son los predominantes. En la Fig. 1 se muestra la relación entre las curvas granulométrica



y de retención de humedad en el suelo B, con un factor de tortuosidad  $T_v = 0.7996$ . En la Fig. 2 se muestra la relación entre las curvas granulométrica y de retención de humedad en el suelo D, con un factor de tortuosidad  $T_v = 1.1157$ . En la Fig. 3 se muestra la relación entre las curvas granulométrica y de retención de humedad en el suelo F, con un factor de tortuosidad  $T_v = 1.3716$ .

En los modelos anteriores la representación de la histéresis en el suelo puede ser atribuida a la no uniformidad geométrica de los poros individuales, que son generalmente de forma irregular interconectados por pequeños pasajes, resultando un efecto de tintero. En el rango de potenciales altos, el efecto de histéresis es, en general, más pronunciado en suelos de textura gruesa que en los de textura fina. Finalmente la histéresis ha sido generalmente omitida en la teoría y en la práctica de la física de los suelos, esto puede ser justificado en los procesos que envuelven sólo alguna rama de la curva como la infiltración (mojado) o evaporación (secado), pero el efecto de histéresis puede ser importante en el caso de procesos compuestos en lo que ocurre simultáneamente o secuencialmente el mojado y el secado en varias partes del perfil del suelo.

#### 4. Conclusiones

Se ha expuesto la curva de retención o características de humedad del suelo que relaciona el contenido de humedad con la presión del agua. También se ha presentado una relación

entre las curvas porosimétrica y granulométrica basada en el supuesto de una relación de vacíos constante en los diferentes empaquetamientos de las partículas del suelo y en una relación entre los tamaños de poro y partícula de los suelos. En la relación entre los tamaños de poro y partículas se hace intervenir el factor de tortuosidad de las trayectorias de flujo basado en el modelo de Fuentes o un factor de alargamiento de las partículas basado en el modelo de Arya y Paris. Puesto que la curva porosimétrica está asociada a una curva de retención de humedad del suelo, la relación propuesta puede ser utilizada para estimar esta última a partir de la curva granulométrica. La relación entre las curvas es validada con los suelos B, D y F de Arya y Paris, con buenos resultados. Con el valor medio de la porosidad de los suelos considerados por Hwang y Powers se pudo predecir los valores de los parámetros empíricos de empaquetamiento y forma de las partículas y poros. Finalmente, la curva de retención ha sido seleccionada a través de modelos fractales con la curva de distribución del tamaño de las partículas o curva granulométrica. Los autores recomiendan como trabajo futuro realizar revisiones de los modelos planteados empleando suelos con características distintas a las consideradas.

#### Agradecimientos

A. López-Lambraño agradece al CONACyT por su apoyo a esta investigación mediante la beca de doctorado 227987.

1. L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique. Tome 6: Mécanique des fluides* (Mir, Moscou, 1989).
2. L.M. Arya and J.F. Paris, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **45** (1981) 1023.
3. R. Haverkamp and J.-Y. Parlange, *Soil Sci.* **142** (1986) 325.
4. C. Fuentes, *Tesis Profesional* (Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, 1985).
5. C. Fuentes, *Tesis de doctoral* (Universite Joseph Fourier-Grenoble I, Francia, 1992).
6. S.I. Hwang and S.E. Powers, *Soil Sci.* **168** (2003) 156.
7. R. Haverkamp and J.-Y. Parlange, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **46** (1982) 1348.
8. Unsaturated Soil Hydraulic Database-UNSODA, *Report EPA/600/R-96/095* (F.J. Leij, W.J. Alves, M. Th. van Genuchten, and J.R. Williams, National Risk Management Research Laboratory, Office of Research and Development, U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati, OH, 1996).
9. Y. Rouault and S. Assouline, *Powder Technol.* **96** (1998) 33.
10. C. Fuentes, R. Haverkamp, F. Zataráin, P. Ross, and A.C.D. Antonino, *Ingeniería Hidráulica en México*, **19-3** (2004) 5.
11. C. Fuentes, F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, and R. Haverkamp, *Ingeniería Hidráulica en México*, **16-2** (2001) 119.
12. R.H. Brooks and A.T. Corey, *Hydraulic properties of porous media* (Colorado State University, USA, 1964).
13. R. Haverkamp, C. Zammit, F. Bouraoui, K. Rajkai, and J.L. Arrúe, N. Heckmann, *Grenoble soil catalogue: soil survey of field data and description of particle size, soil water retention and hydraulic conductivity functions. Laboratoire d'Étude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), Grenoble Cedex 9* (GRIZZLY, France, 1997).
14. M. Th. Van Genuchten, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **44** (1980) 892.
15. W. Brutsaert, *Trans. ASAE* **10** (1967) 400.
16. R.D. Braddock, J.-Y. Parlange, and J. Lee, *Transport in Porous Media* **44** (2001) 407.
17. C. Fuentes, R. Haverkamp, and J.-Y. Parlange, *J. of Hydrology* **134** (1992) 117.
18. L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique. Tome 5: Mécanique statistique* (Mir, Moscou, 1989).