

Hamiltoniano efectivo de un circuito LC con carga discreta bajo la aproximación semiclásica

E. Mamani, M. Calcina-Nogales y D. Sanjinés
*Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés,
 c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635, La Paz, Bolivia.*

Received 21 May 2018; accepted 7 June 2018

Se utiliza un modelo de un circuito LC con carga discreta y una fuente AC de frecuencia ω elevada para determinar su Hamiltoniano efectivo aplicando la aproximación semiclásica y el método de promediación temporal de Kapitza hasta $O(\omega^{-2})$. El resultado corresponde al de la propagación de una partícula en una red de enlace fuerte por el mecanismo de *hopping* bajo la acción simultánea de un campo homogéneo rápidamente oscilante y un campo estático lineal [1], donde la coordenada de posición de la partícula equivale a la carga eléctrica del condensador en el circuito LC. De manera análoga a resultados previos para el oscilador armónico en la red [2], en este caso también se encuentra una condición de bifurcación dada por la carga inicial del condensador que determina la aparición súbita de un voltaje DC. Otra predicción relevante es la supresión controlada de la corriente efectiva al elegir los parámetros de la fuente AC.

Descriptores: Sistemas mesoscópicos; aproximación semiclásica; Hamiltoniano efectivo.

We use a model for a LC circuit with discrete charge and an AC source with high frequency ω to determine its effective Hamiltonian by the application of the semiclassical approximation and the Kapitza's time-average method up to $O(\omega^{-2})$. The result corresponds to that of the propagation of a hopping particle in a lattice in the presence of a combined homogeneous rapidly oscillating field and a static linear field [1], where the particle's position coordinate corresponds to the capacitor's electrical charge in the LC circuit. We find results which are analogous to the previous ones concerning the bifurcation condition for the harmonic oscillator in the lattice [2]; in the LC circuit such a condition is given by the initial capacitor's charge which determines the sudden onset of a DC voltage. Another relevant prediction is the controlled suppression of the effective current by choosing the parameters of the AC source.

Keywords: Mesoscopic systems; semiclassical approximation; effective Hamiltonian.

PACS: 73.23.-b; 03.65.Sq; 05.45.-a; 72.30.+q

1. Introducción

El estudio de Hamiltonianos efectivos en la física del estado sólido, derivados a partir de técnicas de promediación temporal, ha adquirido reciente interés desde el punto de vista de la factibilidad de manipulación de los elementos de salto (*hopping*) en el modelo de enlace fuerte [1,3,4]. Dicha manipulación supone la supresión controlada de la interacción del electrón con sus primeros o segundos vecinos en la red, lo que da lugar a fenómenos interesantes tales como la oscilación de Bloch efectiva [1]. El método de promediación temporal que se usa en este trabajo es el que desarrolló originalmente P. L. Kapitza [5,6] en el que la solución de las ecuaciones de movimiento se separa en una parte rápida con promedio nulo y una parte lenta cuyo promedio evoluciona según ecuaciones efectivas de movimiento. Una de las motivaciones para la deducción de Hamiltonianos efectivos es el hecho de que los algoritmos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan los sistemas físicos suelen presentar inestabilidades cuando las funciones oscilan rápidamente.

En el presente trabajo se aprovecha la analogía formal entre dos sistemas físicos diferentes, una red de estado sólido y un circuito cuántico con carga discreta, para aplicar el método de promediación temporal de Kapitza al segundo sistema, que consiste de un circuito LC en serie con una fuente rápidamente oscilante (Fig. 1a)). Asumiremos el marco conceptual de la teoría cuántica de circuitos con carga discreta

[7] donde se supone que los autovalores del operador carga \hat{q} toman valores discretos nq_e (con n entero y q_e la carga del electrón). El operador conjugado correspondiente a \hat{q} es el operador flujo $\hat{\phi} = -i\hbar\partial/\partial q$ tal que vale el conmutador fundamental $[\hat{q}, \hat{\phi}] = i\hbar$. El operador $\hat{\phi}$ se puede reemplazar por un operador de diferencias finitas (cf., por ejemplo, [8]); sin embargo, la forma directa usual de tomar en cuenta los efectos de la carga discreta es a través del cambio formal $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e) \sin(q_e\hat{\phi}/2\hbar)$ tal como se hace, por ejemplo, en [9,10]. Los fenómenos físicos investigados en este tipo de sistemas han sido ampliamente reportados en la literatura; tales fenómenos comprenden, por ejemplo: bloqueo de Coulomb [11], corrientes persistentes [7], magnificación de la corriente cuántica [12]. En estos casos se ha demostrado exitosamente la factibilidad de modelar la física de los dispositivos mesoscópicos a través del marco conceptual referido.

Para el propósito anunciado, este trabajo se organiza de la siguiente forma: en la Sec. 2 derivamos el Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo del circuito LC, donde ya no aparece explícitamente la fuente $f(\omega t)$ (Fig. 1b)). En la Sec. 3 describimos brevemente la analogía del transporte electrónico en una red de enlace fuerte y en un circuito LC; dicha analogía permitirá entender mejor la física asociada al concepto de “punto de bifurcación”. En la Sec. 4 se deducen dos fenómenos físicos asociados a la elección de los parámetros de control de la fuente AC, lo que permitiría, en principio, manipular la carga y la corriente efectivas del cir-

cuito. En la Sec. 5 se concluyen los aspectos más relevantes de este trabajo y se ofrece algunas perspectivas para futuras investigaciones.

2. Derivación del Hamiltoniano efectivo

Consideremos el circuito LC de la Fig. 1a) con una fuente oscilatoria $f(\omega t)$ de alta frecuencia. El Hamiltoniano clásico (o función Hamiltoniana) correspondiente es:

$$H_0(\phi, q; t) = \frac{\phi^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} + qf(\omega t), \quad (1)$$

donde q es la carga eléctrica y $\phi = L\dot{q}$ es el flujo magnético; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia natural del circuito LC cuando $f(\omega t) = 0$. La sustitución $\phi \rightarrow (2\hbar/q_e)\sin(q_e\phi/2\hbar)$ referida en la Sec. 1 permite obtener el Hamiltoniano con carga discreta

$$H(\phi, q; t) = -\frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \cos\left(\frac{q_e}{\hbar}\phi\right) + \frac{q^2}{2C} + qf(\omega t) + \frac{\hbar^2}{q_e^2 L}, \quad (2)$$

donde se usó $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. A continuación aplicaremos el formalismo semiclásico al Hamiltoniano (2) a través de las ecuaciones clásicas de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (3)$$

de donde se obtiene el sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\dot{q} = \frac{\hbar}{q_e L} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\phi\right), \quad \dot{\phi} = -\frac{q}{C} - f(\omega t). \quad (4)$$

A continuación se invoca la transformación canónica $\phi(t) = \Phi(t) - g(t)$, con

$$g(t) \equiv \int_0^t f(\omega t) dt,$$

de forma que el sistema de Ecs. (4) se escribe ahora de manera más conveniente:

$$\dot{q} = \frac{\hbar}{q_e L} \sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\Phi - g)\right], \quad \dot{\Phi} = -\frac{q}{C}. \quad (5)$$

Para este sistema de ecuaciones se propone la solución

$$q(t) = Q(t) + \xi(\tau), \quad \Phi(t) = \Psi(t) + \eta(\tau), \quad (6)$$

donde se definieron: t y $\tau \equiv \omega t$ como los tiempos “lento” y “rápido”, $Q(t)$ y $\Psi(t)$ como las “coordenadas lentas”, $\xi(\tau)$ y $\eta(\tau)$ como las “coordenadas rápidas”. Reemplazando (6) en (5) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) + \omega \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\hbar}{q_e L} \sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\Psi + \eta - g)\right], \\ \dot{\Psi}(t) + \omega \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{1}{C}(Q + \xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Utilicemos a continuación la definición usual del promedio temporal

$$\langle \cdot \rangle \equiv (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\cdot) d\tau,$$

tal que las coordenadas rápidas tengan un promedio nulo en el intervalo $[0, 2\pi]$: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t) \rangle = 0$, y las coordenadas lentas varíen muy poco: $\langle \Psi(t) \rangle = \Phi(t)$, $\langle Q(t) \rangle = Q(t)$. Así, aplicando dicho promedio temporal al sistema de Ecs. (7), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \frac{\hbar}{q_e L} \left\langle \sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\Psi + \eta - g)\right] \right\rangle, \\ \dot{\Psi}(t) &= -\frac{Q}{C}. \end{aligned} \quad (8)$$

Este es el sistema de ecuaciones de movimiento efectivas para las coordenadas lentas. De manera similar, restando (8) de (7), se obtiene el sistema de ecuaciones de movimiento efectivas para las coordenadas rápidas,

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\hbar}{q_e L} \left\{ \sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\Psi + \eta - g)\right] - \left\langle \sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\Psi + \eta - g)\right] \right\rangle \right\}, \\ \omega \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{\xi}{C}. \end{aligned} \quad (9)$$

A continuación se introducen las series de potencias

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \xi_i = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 + \dots, \\ \eta &= \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \eta_i = \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\epsilon \equiv t/\tau = 1/\omega$ es el parámetro de pequeñez. Las expansiones subsecuentes se hacen de manera consistente hasta ϵ^2 en el Apéndice A; allí se obtienen las ecuaciones efectivas de movimiento para $\dot{Q}(t)$ y $\dot{\Psi}(t)$ (cf. (A.17)),

$$\dot{Q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} F_0 \sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\Psi\right) + \frac{\hbar\epsilon^2}{2q_e L^2 C} \tilde{F}_0 \sin\left(\frac{2q_e}{\hbar}\Psi\right), \quad (11)$$

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{Q}{C}. \quad (12)$$

Con este resultado se calculará el correspondiente Hamiltoniano efectivo $H(Q, \Psi)$. De (11) y (12) se obtienen el cociente $\dot{Q}/\dot{\Psi} = dQ/d\Psi$ y la ecuación diferencial $-\dot{\Psi}dQ + \dot{Q}d\Psi = 0$ que resulta ser exacta pues $-\partial\dot{\Psi}/\partial\Psi = \partial\dot{Q}/\partial Q$. Así, la función constante $H(Q, \Psi)$, cuya diferencial exacta es $dH(Q, \Psi) = -\dot{\Psi}dQ + \dot{Q}d\Psi = 0$, se deduce a partir de la teoría de ecuaciones diferenciales como

$$\begin{aligned} H(Q, \Psi) &= \int (-\dot{\Psi}) dQ \\ &+ \int \left[\dot{Q} - \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\int (-\dot{\Psi}) dQ \right) \right] d\Psi. \end{aligned} \quad (13)$$

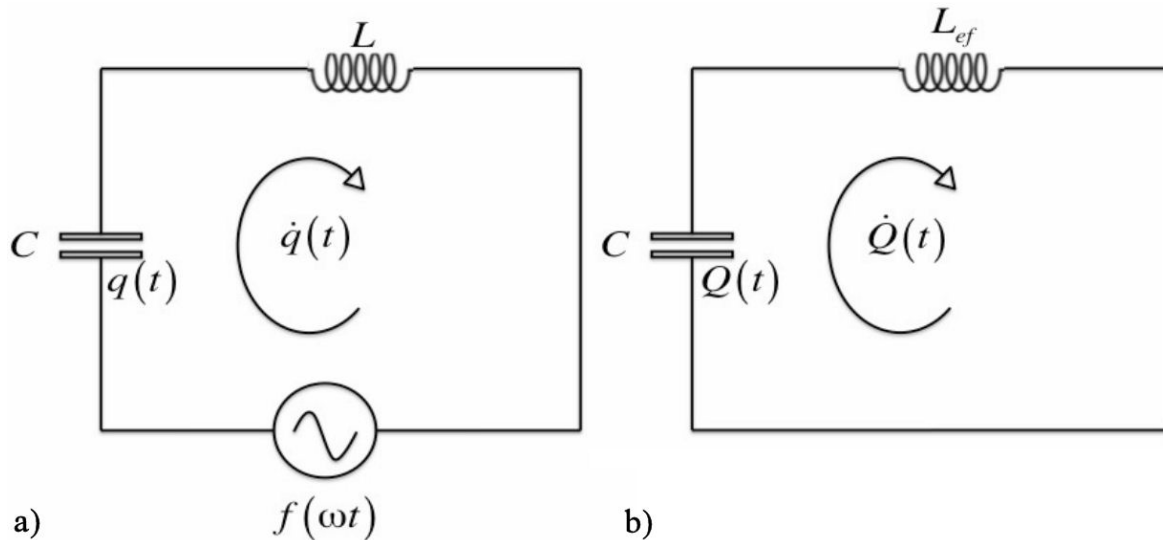


FIGURA 1. a) Circuito LC clásico descrito por el Hamiltoniano (1). La carga del condensador es $q(t)$ y la corriente de la malla es $\dot{q}(t)$. b) Circuito LC “efectivo” descrito por el Hamiltoniano (14). La carga del condensador es $Q(t)$ y la corriente de la malla es $\dot{Q}(t)$. Nótese que ya no aparece explícitamente la fuente externa $f(\omega t)$ aunque sus efectos aparecen en la inductancia efectiva L_{ef} a través de los términos F_0 y \tilde{F}_0 .

Sustituyendo (11) y (12) en (13) se tiene

$$H(Q, \Psi) = -\frac{\hbar^2}{q_e^2 L} F_0 \cos\left(\frac{q_e}{\hbar} \Psi\right) - \frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \left(\frac{\omega_0}{2\omega}\right)^2 \tilde{F}_0 \cos\left(\frac{2q_e}{\hbar} \Psi\right) + \frac{Q^2}{2C}, \quad (14)$$

que es finalmente la expresión buscada para el Hamiltoniano efectivo $H(Q, \Psi)$, a menos de una constante aditiva, con la misma estructura canónica de (3): $\dot{Q} = \partial H(Q, \Psi) / \partial \Psi$, $\dot{\Psi} = -\partial H(Q, \Psi) / \partial Q$; omitimos dicha constante ya que no contiene a las variables dinámicas Q, Ψ y por lo tanto resulta inmaterial en (11) y (12). Nótese que $H(Q, \Psi)$ ya no contiene explícitamente el tiempo t ni la fuente externa que depende de t , pero su efecto se traduce en la aparición de una inductancia efectiva L_{ef} . Así, $H(Q, \Psi)$ representa al circuito LC “efectivo” para la carga lenta $Q(t)$ (Fig. 1 b)). En el límite clásico se obtiene

$$\lim_{q_e \rightarrow 0} H(Q, \Psi) = \frac{\Psi^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C}, \quad (15)$$

pues $F_0 = 1 + O(q_e^2)$ y $\tilde{F}_0 = O(q_e^2)$ (cf. Apéndice B), así que (15) adopta la forma del Hamiltoniano clásico (1) para el circuito LC sin fuente ($f(\omega t) = 0$), como debe ser.

3. Analogía del transporte electrónico en dos sistemas físicos: red de enlace fuerte y circuito LC cuántico

La dinámica de una partícula cargada que se traslada en una red unidimensional con constante de red a (por el mecanismo de *hopping*) en presencia de un campo estático arbitrario $U(x)$ y de un campo uniforme rápidamente oscilante $f(\omega t)$,

se puede describir aproximadamente por el Hamiltoniano de enlace fuerte

$$H(x, p) = -2A \cos ap - 2B \cos 2ap + U(x) + x f(\omega t), \quad (16)$$

donde A, B son los elementos de *hopping* que caracterizan a las interacciones de la partícula con sus primeros y segundos vecinos en la red (las interacciones con vecinos más distantes se suprimieron en (16) debido a que sus elementos de *hopping* son pequeños comparados con A y B); la frecuencia ω se considera mucho mayor que la del sistema físico en ausencia de la fuente $f(\omega t)$ [13], por ejemplo, para el caso de la oscilación de Bloch cuando $U(X)$ es lineal. La aplicación del método de Kapitza permite obtener el Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo [1]

$$H(X, Y) = -2\tilde{A}(X) \cos aY - 2\tilde{B}(X) \cos 2aY - 2\tilde{C}(X) \cos 3aY - 2\tilde{D}(X) \cos 4aY + U(X), \quad (17)$$

donde las coordenadas canónicas X, Y corresponden a las partes lentas de la posición x y del momentum desplazado $y = p + g$, con $\dot{g} = f(\omega t)$. Para el caso particular de un potencial estático $U(X)$ cuadrático, los coeficientes $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ corresponden a los elementos efectivos de *hopping* que dependen de los parámetros de los campos externos estático y oscilante, tales que $\tilde{A} \rightarrow A, \tilde{B} \rightarrow B, \tilde{C} \rightarrow 0, \tilde{D} \rightarrow 0$, cuando $\omega \rightarrow \infty$. En este caso, los Hamiltonianos $H(X, Y)$ y $H(Q, \Psi)$ en (14) son formalmente equivalentes después de establecer las identificaciones: $X \leftrightarrow Q, Y \leftrightarrow (q_e/a\hbar)\Psi$ y $\tilde{B}/\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{L}/\tilde{L}$.

La equivalencia formal de los problemas físicos descritos por sus correspondientes Hamiltonianos $H(X, Y)$ en (17) y $H(Q, \Psi)$ en (14), permite la interesante posibilidad de asociar fenómenos en contextos físicos diferentes. En el caso que exploramos en este trabajo, invocaremos al “oscilador armónico en la red” descrito previamente por Gallinar y Chabaud [2], donde, entre otros resultados, se dedujo la existencia de dos regímenes dinámicos referidos por “régimen del continuo” y “régimen de Bloch”, en los que la partícula cargada (e.g., el electrón) oscila con periodos característicos diferentes, dependiendo de la posición inicial de la partícula X_0 en un potencial cuadrático desplazado de la forma $U(X) = \alpha(X - \beta)^2 + \gamma$. La transición entre los regímenes dinámicos mencionados ocurre de manera súbita en un valor específico de X_0 que se caracteriza como un “punto de bifurcación”, pues la dinámica de la partícula es diferente en ambos regímenes. Este mismo comportamiento (desarrollado en detalle en la Sec. 4.1) debería verificarse experimentalmente en el caso de un circuito LC cuántico en vista de la analogía formal entre los dos sistemas referidos en esta sección.

4. Ingeniería de la carga y de la corriente efectivas

En esta sección consideramos la expresión (11) para la variación temporal de la carga efectiva $Q(t)$. Los coeficientes F_0 y \tilde{F}_0 dependen de los parámetros de la fuente (cf. Apéndice B), así que en principio es posible “manipular” los valores de la corriente y carga efectivas: $\dot{Q}(t)$ y $Q(t)$. Dicha “manipulación” corresponde al significado atribuido al término “ingeniería” en este trabajo. En particular, veremos que es posible lograr dos fenómenos que ocurren como consecuencia directa de la naturaleza discreta de la carga eléctrica: la generación súbita de un voltaje DC a través del condensador (Sec. 4.1) y la supresión de la corriente efectiva en la malla (Sec. 4.2).

4.1. Generación súbita de un voltaje DC

Consideremos la variación temporal de la corriente efectiva $\dot{Q}(t)$ en (11),

$$\ddot{Q} = \frac{1}{L} \left[F_0 \cos\left(\frac{q_e}{\hbar} \Psi\right) + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \tilde{F}_0 \cos\left(\frac{2q_e}{\hbar} \Psi\right) \right] \dot{\Psi}. \quad (18)$$

De (14) se tiene la energía total del sistema,

$$E = \frac{Q^2}{2C} - \frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \left[F_0 \cos\left(\frac{q_e}{\hbar} \Psi\right) + \left(\frac{\omega_0}{2\omega}\right)^2 \tilde{F}_0 \cos\left(\frac{2q_e}{\hbar} \Psi\right) \right]. \quad (19)$$

Para frecuencias ω altas, los términos entre corchetes en (18) y (19) son iguales entre sí hasta ω^{-2} (Apéndice B), de tal forma que

$$\ddot{Q} = - \left(\frac{q_e}{\hbar}\right)^2 \left[\frac{Q^3}{2C^2} - \frac{Q}{C} E \right]; \quad (20)$$

esta ecuación se integra utilizando $\ddot{Q} = \dot{Q}d\dot{Q}/dQ$ con las condiciones iniciales $\dot{Q}_0 = 0$ y $Q_0 \neq 0$,

$$\dot{Q}^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{q_e}{\hbar}\right)^2 (Q_0^2 - Q^2) \left[\frac{Q_0^2 + Q^2}{4C} - E \right]. \quad (21)$$

Nótese que en el límite $q_e \rightarrow 0$ (con $E = E(q_e)$ en (19)) la Ec. (20) se reduce a

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (22)$$

que describe a un oscilador armónico simple, como debe ser. La Ec. (21) se puede representar como un diagrama en el espacio de fases (Q, \dot{Q}) que se muestra en la Fig. 2a) para el caso del campo externo $f(\omega t) = 2f_1 \cos(\omega t)$ (Apéndice B). Una característica peculiar de este tipo de diagramas es la transición súbita entre dos tipos diferentes de curvas: aquellas que oscilan en torno a $Q = 0$ y las que oscilan en torno a $Q \neq 0$; la curva separatriz entre ambos tipos de curvas comprende al punto $(Q, \dot{Q}) = (0, 0)$ que en (21) corresponde al valor inicial de la carga $Q_0 = 0$. El “punto de bifurcación” que separa esos tipos de curvas es el valor especial de la carga inicial del condensador

$$\hat{Q}_0 = 2 \frac{\hbar}{q_e} \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{F_0 + \left(\frac{\omega_0}{2\omega}\right)^2 \tilde{F}_0}, \quad (23)$$

que se calcula estableciendo $\dot{Q} = 0$ en (21) para los casos $Q_0^2 < \hat{Q}_0^2$ y $Q_0^2 > \hat{Q}_0^2$; en el primer caso se obtiene que $Q \in [-Q_0, Q_0]$, mientras que en el segundo caso se obtiene que

$$Q \in \left[-Q_0, -\sqrt{Q_0^2 - \hat{Q}_0^2} \right] \cup \left[\sqrt{Q_0^2 - \hat{Q}_0^2}, Q_0 \right]. \quad (24)$$

Una simulación numérica de la solución de (21) (para los mismos valores de la Fig. 2a)) se muestra en la Fig. 2b). Se observa los dos regímenes dinámicos característicos de la transición a través del punto de bifurcación: oscilaciones centradas en $Q = 0$ ($Q_0 = \pm 1, \pm 2$) y oscilaciones centradas en $Q \neq 0$ ($Q_0 = \pm 3$). Estas últimas son *oscilaciones desplazadas* que se pueden asociar al fenómeno físico de aparición súbita de un voltaje DC (V_{DC}) diferente de cero, como una consecuencia de la naturaleza discreta de la carga eléctrica q_e , pues se sabe que en el límite clásico $q_e \rightarrow 0$, el valor de dicho voltaje a través del capacitor es $V_{DC} = 0$ (caso de la Fig. 1a))ⁱ.

La definición formal de V_{DC} corresponde al valor RMS de $V(t) = Q(t)$ del capacitor (para un valor unitario de la capacitancia): $V_{DC} \equiv \sqrt{\langle Q^2 \rangle_{T'}}$, donde el promedio temporal $\langle \cdot \rangle_{T'}$ se toma sobre el periodo T' de $Q(t)$. Debe notarse, sin embargo, que dicha definición se aplica sólo a una componente de Fourier de la función periódica $Q(t)$. El caso que corresponde a $Q(t)$ en la Fig. 2b) comprende, ciertamente, varias componentes de Fourier, por lo que la definición del

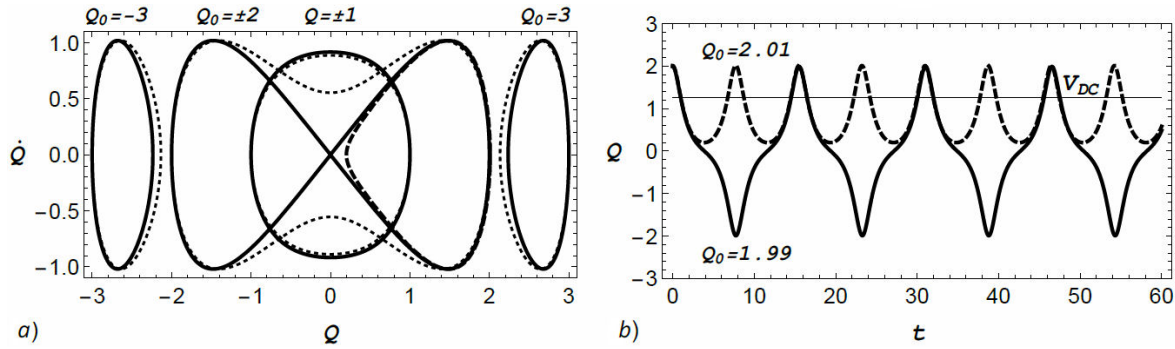


FIGURA 2. a) Simulación numérica de (21) en el espacio fase (\dot{Q}, Q) . Los valores de los parámetros físicos son: $(\omega_0/(2\omega))^2(\tilde{F}_0/F_0) = 0.05$ y valores unitarios de L, C, q_e y \hbar . Las trayectorias en líneas continuas corresponden a $Q_0 = \pm 3, \pm 2, \pm 1$. El valor $Q_0 = 2.01$ es apenas mayor que el del punto de bifurcación $\hat{Q}_0 = 2$, así que su trayectoria (línea segmentada) se separa de la curva separatriz que indica la transición entre las trayectorias centradas en $Q = 0$ de aquellas centradas en $Q \neq 0$. Las trayectorias en línea punteada corresponden a $q_e = 0.9$, por lo que $\hat{Q}_0 > 2$; ahora la trayectoria para $Q_0 = 2$ se encuentra en el régimen centrado en torno a $Q = 0$, mientras que $|V_{DC}|$ disminuye para las trayectorias correspondientes a $Q_0 = \pm 3$. b) Simulación numérica de (11) y (12) para $Q(t)$ con los mismos parámetros y constantes de la Fig. 2a). Las soluciones para $Q(t)$ correspondientes a $Q_0 = 1.99$ y $Q_0 = 2.01$ están centradas en torno a $Q = 0$ (línea continua) y $Q \neq 0$ (línea segmentada), respectivamente. De acuerdo a la definición (25) del voltaje efectivo, para $Q_0 = 2.01$ se obtiene numéricamente $V_{DC} = 1.25$ (línea delgada), mientras que para $Q_0 = 1.99, V_{DC} = 0$. Éste es el fenómeno de generación súbita de un voltaje DC.

voltaje DC se debe extender como $V_{DC} \equiv \sqrt{\sum_i \langle Q_i^2 \rangle_{T_i}}$, donde el índice i corresponde a cada componente de Fourier. Un procedimiento más simple para calcular un valor numérico del voltaje DC es proponer la definición alternativa

$$V_{DC} \equiv \frac{\int_0^{T'} dt Q \dot{Q}^2}{\int_0^{T'} dt \dot{Q}^2}, \tag{25}$$

que comprende de manera global a $Q(t)$ y, por lo tanto, a todas sus componentes de Fourier. Esta re-definición de V_{DC} no es más que el centroide de las trayectorias en el diagrama del espacio fase. En el límite clásico $q_e \rightarrow 0$ se conoce $Q(t)$ de acuerdo a (22), así que se evalúa las integrales de V_{DC} en (25), de donde resulta $V_{DC} = 0$; esto se verifica sobre la base de la simetría de inversión inferida de (21) para la trayectoria en el espacio fase, pues $\lim_{q_e \rightarrow 0} \hat{Q}_0 = \infty$ en (23) implica que cualquier valor finito de Q_0 será menor que \hat{Q}_0 , entonces la oscilación simétrica de $Q(t)$ en torno a $Q = 0$ necesariamente corresponde a $V_{DC} = 0$. Por la misma razón de simetría, cuando $q_e > 0$ la evaluación de (25) para las trayectorias centradas en $Q = 0$ es $V_{DC} = 0$. La ventaja de utilizar esta definición de V_{DC} es que los valores de $Q(t)$ y $\dot{Q}(t)$ que resultan de la solución numérica de (11) y (12) se incorporan de manera directa en la evaluación de (25) a través de una rutina numérica muy simple.

4.2. Supresión de la corriente efectiva en la malla

Éste es otro fenómeno físico interesante cuya eventual observación se podría sugerir en un intervalo adecuado de valores del campo eléctrico $f(\omega t) = 2f_1 \cos(\omega t) + 2f_2 \cos(2\omega t)$. Notemos que la expresión para \dot{Q} en (11) es cero si $F_0 = 0$

y $\tilde{F}_0 = 0$ simultáneamente de acuerdo a (B.2) y (B.10). De manera equivalente, a partir de (21) se demuestra que $|\dot{Q}_{m\acute{a}x}| = \hat{Q}_0^2 q_e / (4\hbar C)$ (para $Q_0 \geq \hat{Q}_0$), donde se verifica que $|\dot{Q}_{m\acute{a}x}| = 0$ cuando $F_0 = \tilde{F}_0 = 0$. En la Fig. 3a) se obtuvieron numéricamente las regiones en la que $F_0 = 0$ (curva continua) y $\tilde{F}_0 = 0$ (curva segmentada), así que las intersecciones de dichas curvas corresponden a los valores del campo eléctrico que permitirían suprimir la corriente efectiva \dot{Q} de la malla. La condición $F_0 = \tilde{F}_0 = 0$ implica que $\hat{Q}_0 = 0$ y esto corresponde, según (21), al sitio geométrico en el espacio fase consistente de los puntos $(Q, \dot{Q}) = (Q_0, 0)$ que yacen sobre el eje Q . En la Fig. 3b) se aprecia la dependencia de $|\dot{Q}_{m\acute{a}x}|$ vs. f_1, f_2 de tal forma que se vea, por ejemplo, cuál sería la “ruta” óptima para suprimir la corriente de la manera menos abrupta posible. En el límite clásico del circuito LC se obtiene

$$\lim_{q_e \rightarrow 0} \dot{Q} = \frac{\Psi}{L} \tag{26}$$

en (11), de manera consistente con la relación entre el flujo magnético y la corriente, $\phi = L\dot{q}$, en el Hamiltoniano clásico (1) (Fig. 1a)) donde no es posible suprimir la corriente.

5. Conclusiones

En este trabajo se utilizó el modelo semiclásico de la dinámica electrónica y la técnica de promediación temporal de Kaptiza para obtener las ecuaciones de movimiento efectivas (11) y (12) de las variables dinámica carga y flujo de un circuito LC de carga discreta y fuente arbitraria rápidamente oscilante, de donde se derivó un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo (14). A partir de dichas ecuaciones de movimiento fue posible inferir dos fenómenos interesantes como consecuencia directa de la naturaleza discreta de la

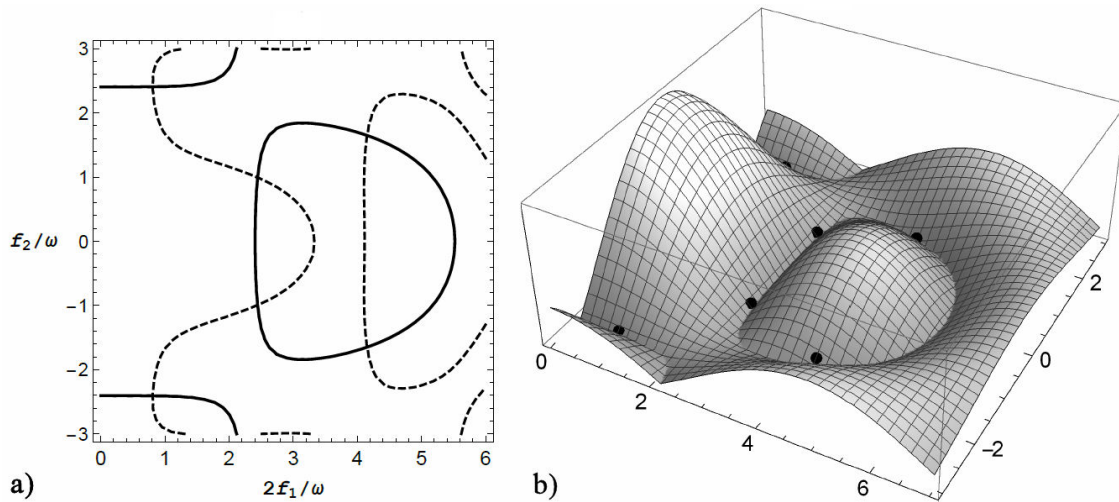


FIGURA 3. a) Simulación numérica de los parámetros del campo eléctrico $f(\omega t) = 2f_1 \cos(\omega t) + 2f_2 \cos(2\omega t)$ para los cuales $F_0 = 0$ (curva continua) y $\tilde{F}_0 = 0$ (curva segmentada), de acuerdo a (B7) y (B9); se tomaron valores unitarios de q_e y \hbar . Las intersecciones de dichas curvas determinan los valores de los parámetros para los que $\dot{Q} = 0$ en (11). Éste es el fenómeno de la supresión de la corriente efectiva en la malla. b) Gráfico tridimensional de $|\dot{Q}_{\text{máx}}|$ (caso de $Q_0 \geq \dot{Q}_0$) cuyos ejes del plano horizontal son los de la Fig. 3(a). Se tomó sólo el término dominante F_0 en (23); los puntos negros corresponden aproximadamente a las intersecciones de las curvas continua y segmentada de la Fig. 3(a).

carga eléctrica. El primero (Sec. 4.1) se refiere al régimen dinámico especial en el que la carga del condensador oscila en torno a un valor $Q \neq 0$; dicha oscilación desplazada (Fig. 2b)) se puede asociar al fenómeno físico de la aparición súbita de un voltaje DC en el condensador. El segundo fenómeno (sección 4.2) es la supresión de la corriente efectiva de la malla, que ocurriría para valores adecuados de las amplitudes de la fuente (Fig. 3a)).

La analogía formal del transporte electrónico en dos sistemas físicos diferentes, la red de enlace fuerte y el circuito LC cuántico (Sec. 3), nos lleva a sugerir que aquellos fenómenos dinámicos que serían difícilmente observables en la red por varias limitaciones experimentales, podrían ser observados de manera equivalente en un circuito LC cuántico, así como el fenómeno de “localización asintótica” predicho para la dinámica electrónica en una red de enlace fuerte [14] fue observado de manera equivalente en un arreglo de fibras ópticas [15]. Por ejemplo, en el caso del “oscilador armónico en la red” (Sec. 3) estudiado por Gallinar y Chalbaud [2] se demostró la existencia de dos regímenes, “el régimen del continuo” y el “régimen de Bloch”, que están separados por un punto de bifurcación; en el caso del circuito LC cuántico, dicho punto de bifurcación separa los regímenes de carga continua ($V_{DC} = 0$) y carga discreta ($V_{DC} > 0$).

Apéndice

A. Derivación de las ecuaciones de movimiento efectivas

En este apéndice derivaremos (11) y (12) como resultado de suponer las expansiones en series (10). Reemplazando (10) en (9) se tiene

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} + \epsilon \frac{d\xi_1}{d\tau} + \epsilon^2 \frac{d\xi_2}{d\tau} = \frac{\hbar}{q_e L} \epsilon \{ \sin \alpha - \langle \sin \alpha \rangle \}, \quad (A.1)$$

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} + \epsilon \frac{d\eta_1}{d\tau} + \epsilon^2 \frac{d\eta_2}{d\tau} = -\frac{1}{C} \epsilon (\xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2), \quad (A.2)$$

donde $\alpha(\epsilon) = (q_e/\hbar)(\Psi + \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 - g)$; luego se expande las funciones $\sin(\cdot)$ en el lado derecho de (A.1) alrededor de $\epsilon = 0$ hasta ϵ^2 ,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \alpha_0 + \epsilon \frac{q_e}{\hbar} \eta_1 \cos \alpha_0 \\ &+ \frac{q_e}{\hbar} \left(\eta_2 \cos \alpha_0 - \frac{q_e}{2\hbar} \eta_1^2 \sin \alpha_0 \right) \epsilon^2, \end{aligned} \quad (A.3)$$

con $\alpha_0 \equiv \alpha(0) = (q_e/\hbar)(\Psi + \eta_0 - g)$. Sustituyendo (A.3) en (A.1), y comparando los términos de las mismas potencias de ϵ de las ecuaciones resultantes en (A.1) y (A.2), se obtienen:

(i) para ϵ^0 :

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta_0}{d\tau} = 0, \quad (A.4)$$

nótese que al integrar las Ecs. (A.4) se obtienen constantes, que se eligen iguales a cero a fin de que las funciones periódicas $\xi(\tau)$ y $\eta(\tau)$ tengan promedios temporales nulos, por lo que queda $\xi_0 = \eta_0 = 0$;

(ii) para ϵ^1 :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau} &= \frac{\hbar}{q_e L} [\sin \alpha_1 - \langle \sin \alpha_1 \rangle], \\ \frac{d\eta_1}{d\tau} &= 0 \Rightarrow \eta_1 = 0; \end{aligned} \quad (A.5)$$

donde $\alpha_1 \equiv \alpha(0) = (q_e/\hbar)(\Psi - g)$ se evaluó en $\eta_0 = 0$;

(iii) para ϵ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{d\tau} &= 0 \Rightarrow \xi_2 = 0, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= -\frac{1}{C}\xi_1. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Con estos resultados, las ecuaciones de movimiento “efectivas” para $Q(t)$ y $\Psi(t)$ dadas en (8) (con ayuda de (A.3)) quedan como

$$\dot{Q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} \left[\langle \sin \alpha_1 \rangle + \frac{q_e}{\hbar} \epsilon^2 \langle \eta_2 \cos \alpha_1 \rangle \right], \tag{A.7}$$

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{Q}{C}. \tag{A.8}$$

A continuación, se busca integrar (A.7) y (A.8) para encontrar un Hamiltoniano efectivo $H(Q, \Psi)$. Para comenzar expresemos $\sin \alpha_1$ en forma compleja,

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{1}{2i} \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} e^{-i(q_e/\hbar)g} \right. \\ &\quad \left. - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} e^{i(q_e/\hbar)g} \right]; \end{aligned} \tag{A.9}$$

ya que $g(\tau)$ es una función periódica, entonces $F(t) \equiv \exp((iq_e/\hbar)g)$ también es una función periódica cuya expansión en serie de Fourier es $F(t) = \sum_n F_n \exp(in\tau)$. Así, (A.9) queda como

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{1}{2i} \sum_n \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_n^* \right. \\ &\quad \left. - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_{-n} \right] e^{-in\tau}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Realizando el promedio temporal de (A.10) y utilizando $\langle \exp(i(n \pm m)\tau) \rangle = \delta_{n, \mp m}$ se obtiene

$$\langle \sin \alpha_1 \rangle = \frac{1}{2i} \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_0^* - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_0 \right]. \tag{A.11}$$

A continuación (A.10) y (A.11) se reemplazan en la primera ecuación de (A.5) y se integra en τ ,

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau) &= \frac{\hbar}{2q_e L} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \\ &\quad \times \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_n^* - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_{-n} \right] e^{-in\tau}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Por otra parte, reemplazando (A.12) en la segunda ecuación de (A.6) e integrando en τ se obtiene

$$\begin{aligned} \eta_2(\tau) &= \frac{\hbar}{2q_e LC} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{in^2} \\ &\quad \times \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_n^* - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_{-n} \right]. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Con un procedimiento análogo al que se utilizó para obtener (A.10), se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{1}{2} \sum_n \\ &\quad \times \left[e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_n^* + e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_{-n} \right] e^{-in\tau}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

A continuación se calcula la expresión $\langle \eta_2 \cos \alpha_1 \rangle$ según lo requerido en (A.7). Así, utilizando (A.13) y (A.14) resulta

$$\begin{aligned} \langle \eta_2 \cos \alpha_1 \rangle &= \frac{\hbar}{4iq_e LC} \\ &\quad \times \left(e^{2i(q_e/\hbar)\Psi} \tilde{F}_0^* - e^{-2i(q_e/\hbar)\Psi} \tilde{F}_0 \right), \end{aligned} \tag{A.15}$$

donde se definió $\tilde{F}_m \equiv \sum_{n \neq 0} F_n F_{m-n}/n^2$. Sustituyendo (A.11) y (A.15) en (A.7) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \frac{\hbar}{2iq_e L} \left[\left(e^{i(q_e/\hbar)\Psi} F_0^* - e^{-i(q_e/\hbar)\Psi} F_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^2}{2LC} \left(e^{2i(q_e/\hbar)\Psi} \tilde{F}_0^* - e^{-2i(q_e/\hbar)\Psi} \tilde{F}_0 \right) \right]. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Ya que $f(\omega t)$ de la fuente es una función real, entonces se expande como $f(\omega t) = \sum_n f_n \exp(in\omega t)$, donde los coeficientes f_n son reales y pares, *i.e.*, $f_n = f_{-n} = f_n^*$, asimismo se supone que el promedio temporal de $f(\omega t)$ en un periodo $2\pi/\omega$ es nulo, $\langle f(\omega t) \rangle = 0$, por lo que $f_0 = 0$. Así, los coeficientes F_n y \tilde{F}_n son reales. Finalmente, las ecuaciones de movimiento efectivas para la carga $Q(t)$ y el flujo magnético desplazado $\Psi(t)$ son (cf. (11) y (12))

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \frac{\hbar}{q_e L} F_0 \sin((q_e/\hbar)\Psi) + \frac{\hbar \epsilon^2}{2q_e L^2 C} \tilde{F}_0 \sin\left(\frac{2q_e}{\hbar}\Psi\right), \\ \dot{\Psi}(t) &= -\frac{Q}{C}. \end{aligned} \tag{A.17}$$

B. Deducción de los coeficientes F_n

Para la función de la fuente $f(\omega t)$ considerada en el Apéndice A, se sabe que los coeficientes F_n están dados por [16]

$$\begin{aligned} F_n &= \delta_{n,0} + \frac{q_e}{\hbar\omega} \sum_{m \neq 0} \frac{f_m}{m} \delta_{n,m} \\ &\quad + \frac{q_e^2}{2\hbar^2\omega^2} \sum_{(m,p) \neq 0} \frac{f_m f_p}{mp} \delta_{n,m+p}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Por otra parte, de la definición de \tilde{F}_n usada en (A.15), se tiene que

$$\tilde{F}_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} F_n^2. \tag{B.2}$$

Luego, en el límite $\omega \rightarrow \infty$ se tiene $F_0 \rightarrow 1$ y $\tilde{F}_0 \rightarrow 0$, lo que se usa en (15).

Consideremos a continuación el caso del campo $f(\omega t) = 2f_1 \cos(\omega t)$ usado en la Sec. 4.1. En este caso se obtienen

$$g(t) \equiv \int_0^t f(\omega t) dt = (2f_1/\omega) \sin(\omega t) \quad (\text{B.3})$$

y

$$F(t) = \exp [2iq_e \sin(\omega t) f_1 / (\hbar\omega)], \quad (\text{B.4})$$

así que los coeficientes de Fourier en (A.11) son

$$\begin{aligned} F_n &= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} F(\tau) e^{-in\tau} d\tau \\ &= J_n(2q_e f_1 / (\hbar\omega)), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde se usó la función generatriz de las funciones de Bessel de primera clase y orden entero

$$e^{i\xi \sin(\omega t)} = \sum_n e^{in\omega t} J_n(\xi), \quad (\text{B.6})$$

y

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\omega\tau} d\tau = 2\pi\delta_{m,n}. \quad (\text{B.7})$$

Para valores suficientemente grandes de $\omega \equiv 1/\epsilon$ en el argumento de J_n en (B.5) usamos las expansiones de J_n en series de potencias [17]:

$$\begin{aligned} J_0(\epsilon) &= 1 - (\epsilon/2)^2 + O(\epsilon^4), \\ J_n(\epsilon) &= (\epsilon/2)/n! + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

para $n \geq 1$. De (B.5) y (B.2) se obtiene las expansiones

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 - (q_e f_1 / (\hbar\omega))^2 + O(\omega^{-4}), \\ \tilde{F}_0 &= -(7/8)(q_e f_1 / (\hbar\omega))^2 + O(\omega^{-4}), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

que se usan en la Sec. 4.1 junto con $(\omega_0/(2\omega))^2 \tilde{F}_0/F_0 = 0.05$, $f_1/\omega = 0.22$ y valores unitarios de L, C, q_e, \hbar , de tal forma que $\hat{Q}_0 = 2$ en (23).

Ahora consideremos el caso del campo $f(\omega t) = 2f_1 \cos(\omega t) + 2f_2 \cos(2\omega t)$ usado en la Sec. 4.2. Seguimos el mismo procedimiento de la primera parte de este Apéndice (Ecs. (B.3)–(B.8)) y obtenemos

$$F_n = \sum_m J_{n-2m} \left(\frac{2q_e f_1}{\hbar\omega} \right) J_m \left(\frac{q_e f_2}{\hbar\omega} \right). \quad (\text{B.10})$$

De aquí se obtienen los valores de F_0 y \tilde{F}_0 por evaluación numérica. En particular, se pueden calcular los valores de $2f_1/\omega$ y f_2/ω tales que $F_0 = 0$ y $\tilde{F}_0 = 0$, como se muestra en la Fig. 3a).

i. Un valor $V_{DC} > 0$ en el circuito LC clásico se podría mantener constante de manera aparente si una inductancia L muy grande corresponde a una frecuencia ω_0 muy pequeña. Así, la carga inicial Q_0 del condensador es aproximadamente constante durante un lapso temporal finito. El límite $L \rightarrow \infty$ corresponde a un circuito LC “abierto”, y por lo tanto $Q(t) = Q_0$ para todo tiempo. En el circuito LC efectivo de la Fig. 2b), el valor $V_{DC} > 0$ se mantiene constante para *todo tiempo*, lo que ciertamente no se cumple en el circuito LC clásico para un intervalo temporal suficientemente grande.

1. E. Mamani, M. Calcina-Nogales, y D. Sanjinés, *Int. J. Mod. Phys. B* **31** (2017) 1750116,.
2. J.P. Gallinar y E. Chalbaud, *Phys. Rev. B*, **43** (1991) 2322.
3. A.P. Itin y A. Neishtadt, *Phys. Lett. A* **378** (2014) 822.
4. A. P. Itin y M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 075301.
5. P. L. Kapitza, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **21** (1951) 588.
6. P. L. Kapitza, *Collected papers of P.L. Kapitza*. ed. D. ter Haar, (Pergamon Press, Oxford, 1965).

7. B. Chen y Y. Q. Li *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
8. C. A. Utreras y D. Laroze, *Mod. Phys. Lett. B* **26** (2012) 1250138.
9. J. C. Flores y E. Lazo, *IEEE*. **4** (2005) 688.
10. M. Calcina-Nogales, *Mod. Phys. Lett. B* **27** (2013) 1350138.
11. B. Chen, *Phys. Lett. A* **335** (2005) 103.
12. J. C. Flores, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 153410.
13. L. D. Landau, *Mecánica*. Reverté, (Barcelona, 1985).
14. D. Sanjinés y J. P. Gallinar, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 054301.
15. F. Dreisow, O. Bahat-Treidel, D. Welt, y A. Szameit *Opt. Lett.* **36** (2011) 2065-2067.
16. E. Mamani, *Tesis Doctoral*. Universidad Mayor de San Andrés, (La Paz, Bolivia, 2017).
17. M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. (Dover, New York, 1965).