

## Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica

E. Andrés-Zárate<sup>a</sup>, Q. Angulo Córdova<sup>a</sup>, G. Gutiérrez Tepach<sup>a</sup>, and J.A. Hernández-Nolasco<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB,

Carr. Cunduacán-Jalpa Km. 1.5, Tabasco, 86680 México.

<sup>b</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DAIS,

Carr. Cunduacán-Jalpa Km. 1.5, Tabasco, 86680 México.

e-mail: adan.hernandez@ujat.mx

Received 10 August 2018; accepted 27 November 2018

Usando el método de propagación del espectro angular, se determinaron los modelos matemáticos de difracción óptica asociados a la distribución de amplitud del campo difractado por dos aberturas circulares de diámetros diferentes. Se establece la existencia de un patrón de difracción derecho y otro izquierdo, así como el desfaseamiento del campo al propagarse en las regiones de Fresnel (convergente y divergente) de una lente esférica. Se muestran resultados experimentales, así como los generados mediante simulación.

*Descriptores:* Difracción; convolución; convergente; divergente; Fresnel.

The mathematical models of optical diffraction were determined using spectral angular propagation, which are associated with the amplitude distribution of the field diffracted by two circular apertures with different diameters. The existence of a right and left diffraction pattern is established and also the field offset as it propagates in the Fresnel zones (convergent and divergent) of a spherical lens. Herein, experimental and the simulation results are shown.

*Keywords:* Diffraction; convolution; convergent; divergent; Fresnel.

PACS: 42.15.Eq; 42.25.Fx; 42.30.Kq.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.65.299>

### 1. Introducción

El problema de difracción de luz coherente puede ser interpretado como el mapeo de la distribución de amplitud del campo óptico en algunas regiones del espacio, asociado a este problema existe la necesidad de describir la distribución de amplitud caracterizada por la función de transmitancia  $t(x, y)$  asociada a la apertura u objeto difractor en planos de la región convergente, divergente y focal de una lente esférica [1]. Sheppard y Hrynevych [2], realizaron el estudio de difracción por una apertura circular, en el que propusieron una generalización a la teoría de difracción de Fresnel, a través de una aproximación por variación paraboidal en vez de una variación binominal en los términos de fase en la ecuación. Quintero *et al.*, [3] estudiaron los efectos de difracción e interferencia producidos por una estructura compuesta de múltiples aberturas circulares idénticas, no reportan análisis de propagación, ni presentan un modelo matemático de difracción, ya que el trabajo lo realizaron sin el uso de lente transformadora.

Zárate [4] estudió la propagación del campo difractado por dos aberturas de radios con igual magnitud, su análisis lo realizó hasta la región de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, usando un doblete cementado como lente transformadora. Mientras que Zárate *et al.*, [6], realizaron un análisis de propagación hasta el plano de enfoque o de Fraunhofer de un doblete cementado como lente transformadora, además presentaron imágenes de patrones de difracción generados de forma experimental, en las cuales no se aprecia la geometría elíptica de las franjas de máxima y mínima intensidad, sin realizar un análisis de la propagación del campo de difrac-

ción hacia las regiones convergente y divergente de la lente transformadora.

En este trabajo, se reporta el estudio de propagación hasta la región convergente y divergente del doblete cementado del campo de difracción producido por dos aberturas circulares con radios de diferente magnitud, contenidas en material laminado, iluminadas con ondas planas. El tratamiento se realizó bajo el formalismo del método de propagación del espectro angular.

### 2. Materiales y métodos

El modelo matemático de difracción fue generado de acuerdo con el arreglo de la Fig. 1. Centrando el análisis de propagación del campo difractado por las dos aberturas (Fig. 1,4) colocadas en el plano  $x_0y_0$ , de radios  $a_1$  y  $a_2$  de diferentes

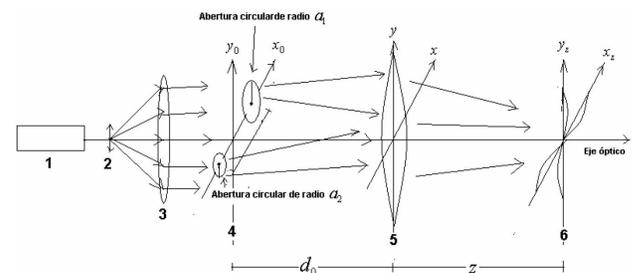


FIGURA 1. Procesador de Fourier usado para obtener patrones de difracción. Sobre la figura identificamos a: (1) láser de He-Ne, (2) filtro espacial, (3) colimador, (4) objeto bajo estudio en plano  $x_0y_0$ , (5) lente transformadora, y (6) plano de observación  $x_zy_z$ .

magnitudes iluminadas con ondas planas monocromáticas de amplitud constante  $E_0$ . La función de transmitancia que se le asocia al par de aberturas como objeto difractor es,  $t_0(x_0, y_0) = l_z \text{circ}(r_{01} - l_1/a_1) + l_z \text{circ}(r_{02} + l_1/a_2)$  Goodman, (2005), siendo  $l_1$  la distancia a la que se encuentran desplazadas las aberturas circulares, respecto al origen de coordenadas del plano objeto  $x_0y_0$  ver Fig. 1, cuyo espesor es  $l_z$ ,  $r_{01}$  y  $r_{02}$  en coordenadas polares quedan definidos como  $r_{01} = \sqrt{x_{01}^2 + y_{01}^2}$  y  $r_{02} = \sqrt{x_{02}^2 + y_{02}^2}$  respectivamente.

El campo de ondas monocromáticas difractadas por el objeto o aberturas circulares desplazadas del origen en la cantidad  $l_1$ , y distribuidas en el plano  $x_0y_0$ , está dado por la Ec. (1).

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0) = E_0 \left[ l_z \text{circ} \frac{r_{01} - l_1}{a_1} + l_z \text{circ} \frac{r_{02} + l_1}{a_2} \right]. \quad (1)$$

Zárate *et al.*, [6] determinaron que la distribución de amplitud del campo propagado hasta el plano  $x_z y_z$ , en el que se distribuye, se obtiene mediante la Ec. (2), en la que se ha usado como condición inicial que el objeto difractor esté colocado a la distancia  $d_0$ , la cual es la misma que la longitud focal del doblete cementado o lente transformadora ( $d_o = f_{LD}$ ), además de considerar el teorema de la transformada de Fourier del producto de funciones [7].

$$G_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2}]} \left[ \mathcal{F} \{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \mathcal{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2)} \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right) \right\} \right]_{u = \frac{x_z}{\lambda f_{LD}}, v = \frac{y_z}{\lambda f_{LD}}}. \quad (2)$$

La transformada de Fourier de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  en la Ec. (2) se obtiene usando el teorema de linealidad, escalamiento [7]; siendo  $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$  la frecuencia espacial definida en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , resultando

$$\mathcal{F} \{t_0(x_0, y_0)\} = l_z \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (3)$$

En tanto que la transformada de Fourier de la Función exponencial de la Ec. (2) es:

$$\mathcal{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2)} \right\} = \left( \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)} \right) e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)}. \quad (4)$$

Sustituyendo las Ecs. (3) y (4) en la Ec. (2) se determina que la distribución de amplitud del campo difractado, queda definida por la Ec. (5) en la que el símbolo  $\otimes$  indica la

operación de convolución de funciones:

$$G_z(u, v) = e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2}]} \left( \frac{E_0 f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \right) \bullet \left[ l_z \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right] \otimes e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \right]_{u = \frac{x_z}{\lambda f_{LD}}, v = \frac{y_z}{\lambda f_{LD}}}. \quad (5)$$

### 3. Resultados Teóricos

La Ec. (5) establece que, el patrón de difracción  $G_{zC}(u, v)$  (el cual se interpreta como un patrón de difracción derecho), se ha propagado hasta la región de Fresnel convergente situada en el intervalo de distancia  $0 < z < f_{LD}$ , donde  $f_{LD}$  es la distancia focal de la lente transformadora o doblete cementado. Mediante el uso de las propiedades distributiva y conmutativa de la convolución, la Ec. (5) se reescribe para esta región de Fresnel convergente en la forma dada por la Ec. (6). En esta ecuación, el desfaseamiento que ha sufrido el campo propagado desde el plano  $x_0y_0$  hasta el plano  $x_z y_z$  en el intervalo arriba especificado, es de  $\pi/4$ , el cual se obtiene realizando la integral de convolución de la Ec. (5) y considerando que  $f_{LD} - z > 0$ .

$$G_{zC}(u, v) = \frac{2l_z E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2}]} \sqrt{\lambda(f_{LD} - z)} \times e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \phi}{\lambda f_{LD}^2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \bullet \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (6)$$

El patrón de difracción propagado hasta la región de Fresnel divergente de la lente transformadora, situada en el intervalo de distancia  $z$  dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$  se interpreta como un patrón de difracción izquierdo, quedando definido a través de la Ec. (7), el desfaseamiento en esta región fue de  $3\pi/4$ , mismo que se determina considerando que  $z - f_{LD} > 0$  y realizando la integral de convolución de la Ec. (5).

$$G_{zD}(u, v) = e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2}]} \times \frac{2l_z E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \bullet e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \phi}{\lambda f_{LD}^2}} \times \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (7)$$

Las distribuciones de intensidad para las regiones de Fresnel (convergente y divergente) de la lente transformadora, se determinan respectivamente por las Ecs. (8) y (9).

$$I_{zC}(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 l_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \cos(2\pi l_1 u) \times \left\{ (a_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + 2a_1^2 a_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right] \times \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] + (a_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] \right\}, \quad (8)$$

$$I_{zD}(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 l_z f_{LD})^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \cos(2\pi l_1 u) \times \left\{ (a_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + 2a_1^2 a_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right] \times \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] + (a_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] \right\}. \quad (9)$$

Los productos de funciones Bessel  $J_1(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega)$  de las Ecs. (8) y (9), se determinan usando la siguiente ecuación [8,4].

$$J_1(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) = \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega} \bullet [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) + 2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)] - \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \times \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 \omega) J_{1+s}(2\pi a_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi a_1 \omega) J_s(2\pi a_2 \omega)]. \quad (10)$$

Considerando que los productos de las funciones Bessel de la Ec. (10) definidos por la suma

$$\sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 \omega) J_{1+s}(2\pi a_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi a_1 \omega) J_s(2\pi a_2 \omega)],$$

no aportan información relevante a la distribución de intensidad, por lo cual no se toman en cuenta, y combinando la ecuación referida con la Ec. (8). Se obtiene que la distribución de intensidad en la región de Fresnel convergente de la

lente transformadora es:

$$I_{zC}(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 l_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right]^2 (a_1^3)^2 \left[ \frac{a_1 J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \times \{ [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) + [2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)]] \} - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \times [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + (a_2^3)^2 \left[ \frac{a_2 J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2. \quad (11)$$

La distribución de intensidad en la región de Fresnel divergente de la lente transformadora, se determina considerando que la suma de funciones Bessel en la Ec. (10) no aporta información relevante, bajo esta condición la Ec. (9) se reescribe en la forma:

$$I_{zD}(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 l_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right]^2 (a_1^3)^2 \left[ \frac{a_1 J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \times \{ [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) + [2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)]] \} - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(2\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \times [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + (a_2^3)^2 \left[ \frac{a_2 J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2. \quad (12)$$

En la Ec. (11) la distribución del patrón de difracción que se propaga en la región de Fresnel convergente de la lente transformadora, difiere solo en el denominador de la distribución de intensidad definida con la Ec. (12) del patrón de difracción izquierdo que se propaga en la región de Fresnel divergente de la lente transformadora. Las Ecs. (11) y (12) nos permiten afirmar que en las regiones convergente y divergente de la lente transformadora existe un patrón de difracción elíptico que modula franjas de Young.

#### 4. Resultados experimentales

Los experimentos se desarrollaron empleando el sistema óptico de la Fig. 2a, el cual está en relación directa con el esquema de la Fig. 1. El haz de luz de laser de He-Ne ( $\lambda = 632 \text{ nm}$ ) ampliado y filtrado con objetivo de microscopio 40X y pinhole de  $50 \mu\text{m}$ , fue colimado con lente doblete acromático de 50 cm de distancia focal. Como objeto difrac-

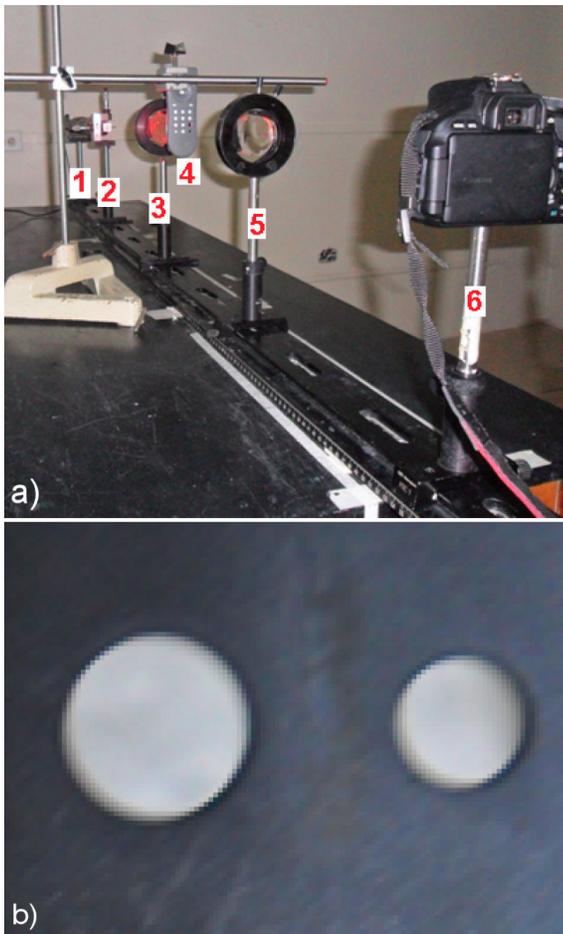


FIGURA 2. a) Arreglo experimental, b) Aperturas con radios diferentes magnitudes.

tor, se usaron dos aperturas circulares, su imagen se muestra en la Fig. 2b, cuyos radios de curvatura son:  $a_1 = 1.0$  mm y  $a_2 = 1.5$  mm, respectivamente. Contenidas en material laminado de plástico con  $l_z = 2.0$  mm de espesor. Se usó como lente transformadora un doblete acromático cementado de 25 cm de distancia focal. Las imágenes de cada patrón de difracción en intensidad, se grabaron usando una cámara digital de alta velocidad y precisión, con sensor CMOS y 18.0 mega-píxeles.

En la región de Fresnel convergente situada en el intervalo de distancia  $0 < z < f_{LD}$  de la lente transformadora, se obtiene la convolución de los patrones de difracción, cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados por la Ec. (11) y se consideran derechos. La Fig. 3. a), b) y d) muestran la distribución de irradiancia, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias, ver Tabla I, en la región de Fresnel convergente antes referida, puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young.

Las imágenes de la Fig. 3, fueron generadas cuando los centros geométricos de las aperturas circulares Fig. 2, se orientaron paralelas al eje  $x_0$  del plano objeto. La Fig. 3a,

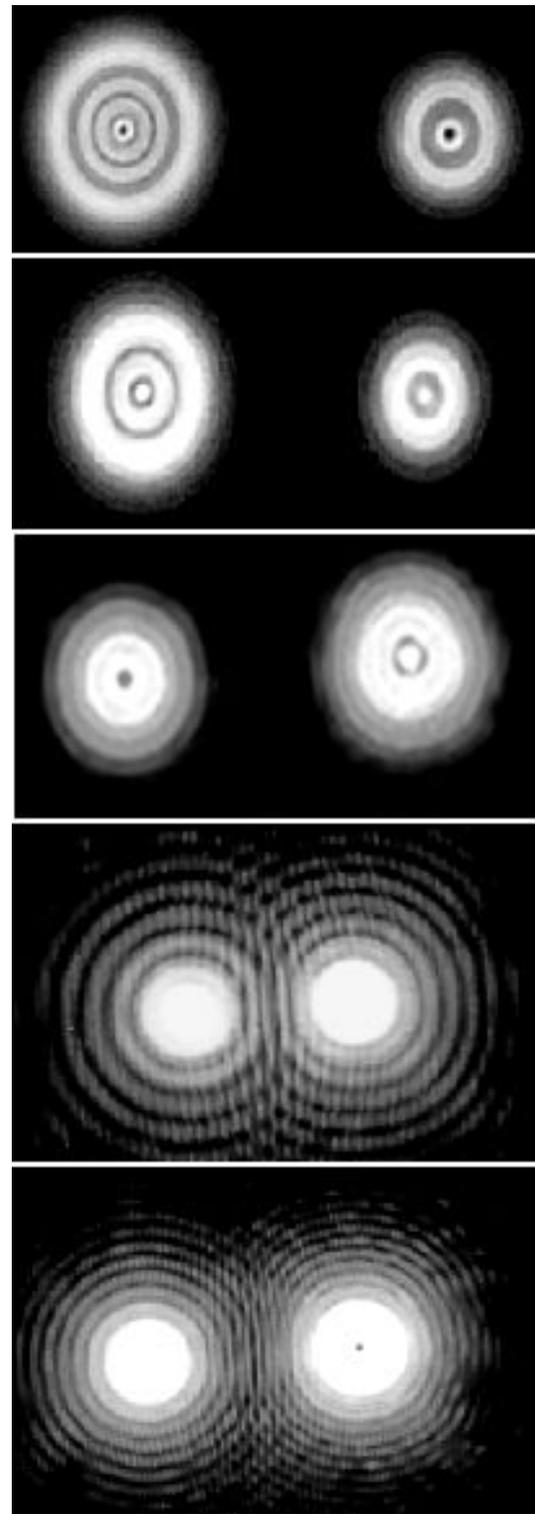


FIGURA 3. a), b), c), d) y e) Patrones de difracción de convolución grabados a diferentes distancias de la lente transformadora obtenidos experimentalmente.

muestra mínimos de irradiancia centrales en cada patrón, se establece que es más dominante la función de Bessel de orden uno en el producto con la función de Bessel de orden cero a la distancia  $z = 22$  cm de propagación. Mientras que a la dis-

TABLA I. Distancia objeto lente y lente plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje  $x_0$ .

Distancia lente objeto difractor $d_0$	Distancia lente plano de grabado $z$	Número de imagen
25cm	22cm	3a
25cm	23cm	3b
25cm	48cm	3c
25cm	24cm	3d
25cm	35cm	3e

TABLA II. Distancia objeto lente y lente plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje  $y_0$ .

Distancia lente objeto difractor $d_0$	Distancia lente plano de grabado $z$	Número de imagen
25cm	20cm	4a
25cm	23cm	4b
25cm	48cm	4c

tancia de propagación  $z = 23$  cm y  $z = 24$  cm, la función de Bessel de orden cero es la dominante en el producto dando máximos centrales de difracción, ver Figs. 3b y 3d. Se observa que, conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de la lente transformadora los máximos centrales en cada patrón se amplifican Fig. 3d. Las imágenes de la Fig. 3c y 3e se consideran izquierdas y dan referencia del grabado de patrones de difracción en la zona de Fresnel divergente o de convolución situada en el intervalo de distancia  $f_{LD} < z < \infty$  de la lente transformadora; se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de irradiancia alternados, cuantitativamente se pueden relacionar con los valores exactos dados por la Ec. (12), además se ve que cada patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young.

La Fig. 5. a), b) y c) muestran la distribución de irradiancia, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias de la lente transformadora, ver Tabla II. Cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados por la Ec. (11) y se consideran derechos, en la región de Fresnel (convergente) antes referida, puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young. Las imágenes de la Fig. 5a y 5b, fueron generadas cuando los centros geométricos de las aberturas circulares ver Fig. 2, se orientaron paralelas al eje  $y_0$  del plano objeto. La imagen de la Fig. 5a, muestra un máximo y un mínimo de irradiancia centrales en cada patrón, se establece que en el patrón de difracción superior es más dominante la función de Bessel de orden cero que la función de Bessel de orden uno, en el producto de funciones de Bessel a la distancia  $z = 20$  cm; mientras que, en el patrón de difracción inferior, dimina la función, más que la de orden cero en el producto, de acuerdo a la Ec. (11). A la distancia de

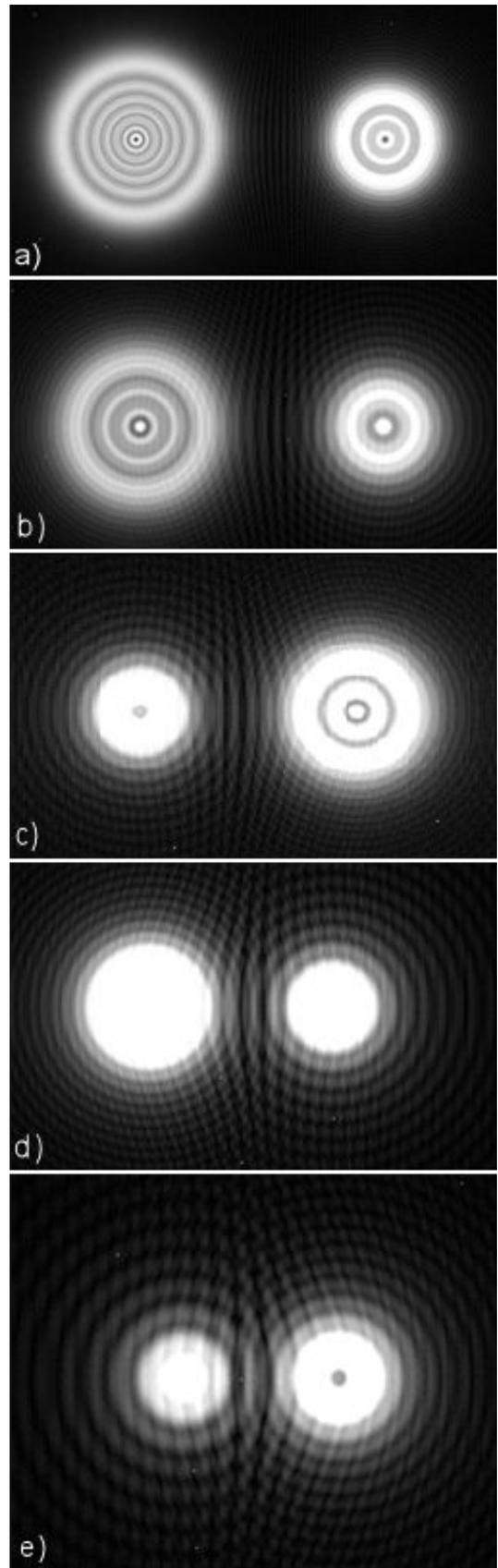


FIGURA 4. a), b), c), d) y e) Patrones de difracción generados mediante simulación.

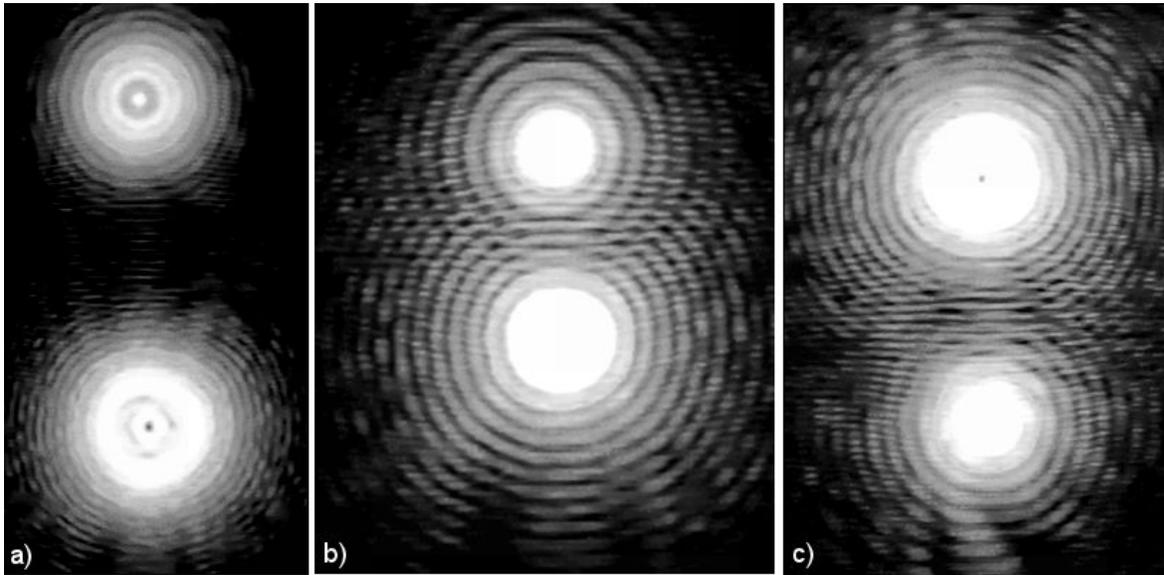


FIGURA 5. a), b), c) Patrones de difracción de convolución grabados en la región de Fresnel convergente y divergente de la lente transformadora obtenidos experimentalmente.

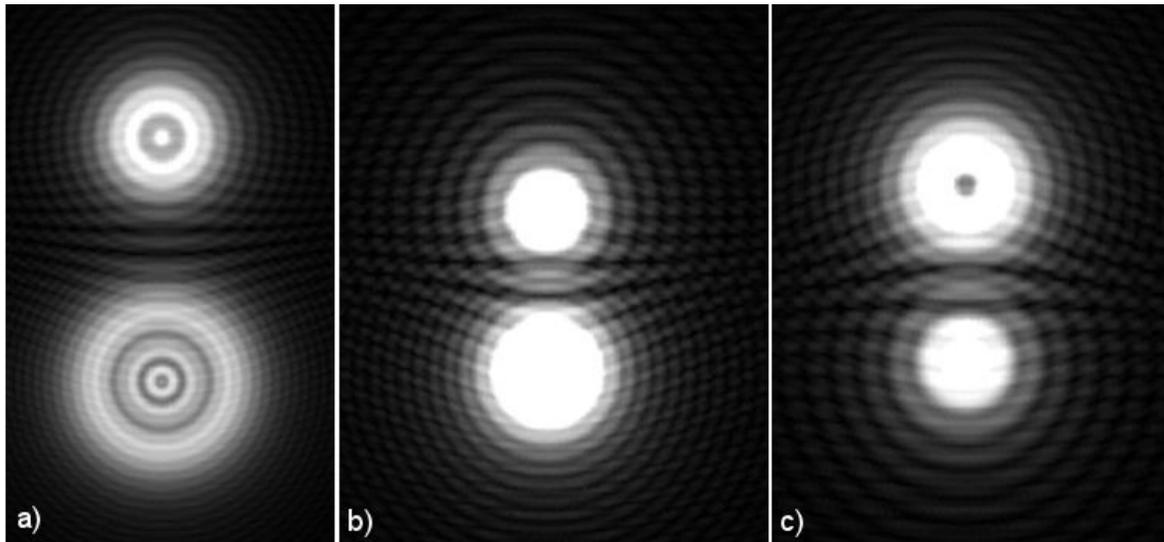


FIGURA 6. a), b) y c) Imágenes de difracción obtenidas mediante simulación.

propagación  $z = 24$  cm, la función de Bessel de orden cero es la dominante en el producto generando máximos centrales de difracción ver Fig. 5b. Se observa que, conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de la lente transformadora, los máximos centrales en cada patrón de difracción se amplifican. La imagen del patrón de difracción de la Fig. 5c se considera izquierdo y fue grabado en la zona de Fresnel divergente o de convolución de la lente transformadora; se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de irradiancia alternados, puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young.

En el plano focal, de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, situado a la distancia  $z = 25$  cm de la lente transformadora, se grabaron los patrones de difracción, los cuales se

muestran en la Fig. 7. a) y b). La imagen de la Fig. 7a corresponde al patrón de difracción de franjas elípticas, producido por las dos aberturas circulares cuyos centros de curvatura estaban orientados en el eje  $x_0$  del plano objeto, modulando franjas verticales de Young. Por la forma en que la lente hace converger la información, las franjas elípticas de máxima y mínima intensidad, quedan orientadas hacia el eje  $v$  en el espacio de frecuencias espaciales. La imagen de la Fig. 7b, muestra el patrón de difracción de transformada de Fourier, producido por el mismo par de aberturas circulares, con centros de curvatura orientados hacia el eje  $y_0$  del plano objeto, en este caso las franjas elípticas están orientadas hacia el eje  $u$  en el espacio de frecuencias, modulando franjas horizontales de Young.

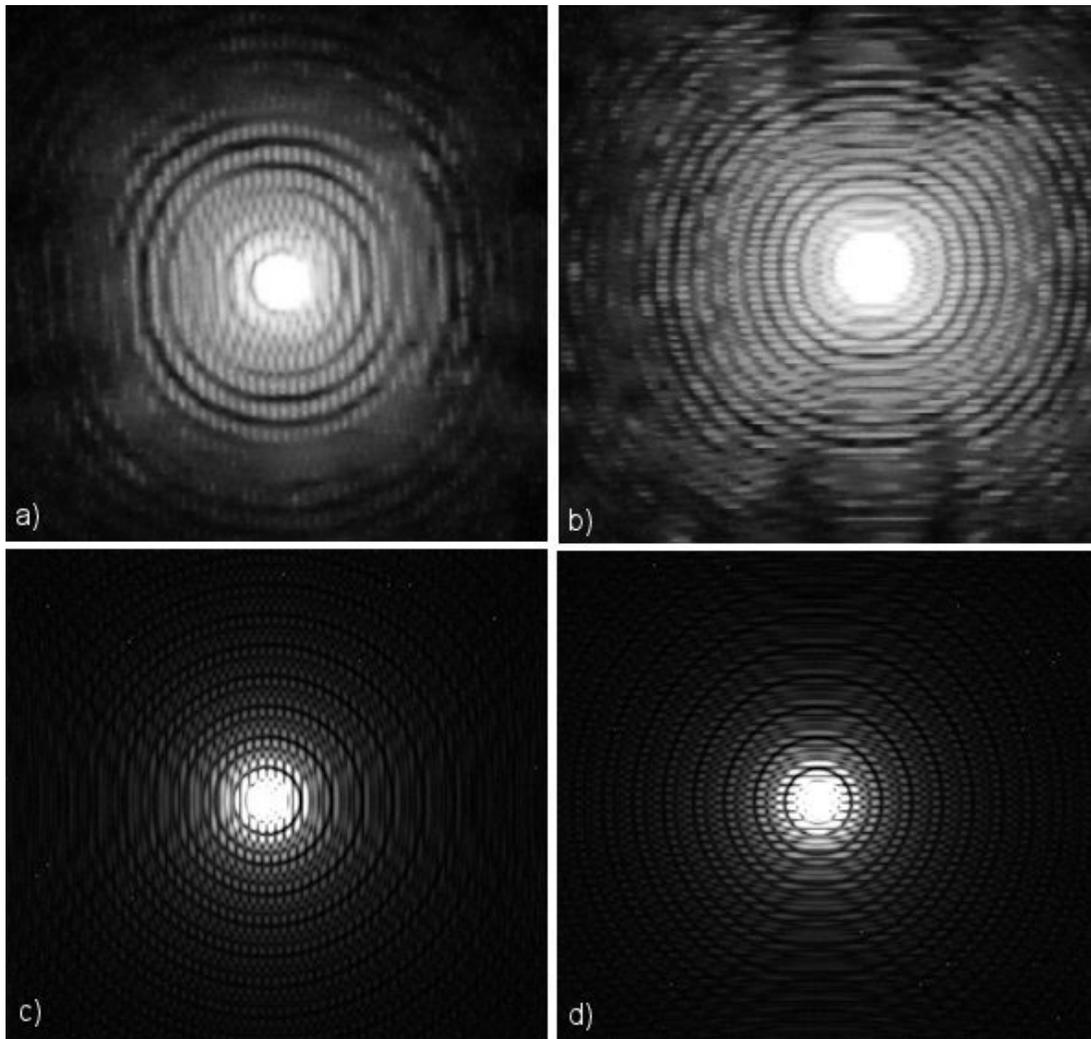


FIGURA 7. a), b). Patrones de difracción de transformada Fourier obtenidos de forma experimental. Las imágenes c) y d) fueron obtenidas mediante simulación.

El Teorema de rotación publicado por Bracewell [9], establece que: Si una función  $f(x, y)$  es rotada en el plano  $xy$ , entonces su transformada de Fourier  $g(u, v)$  es rotada en el plano  $uv$  a través del mismo ángulo y en el mismo sentido. En base al teorema antes referido basta establecer que la transformada de Fourier es sensible a rotación, con lo cual se establece que los patrones de difracción mostrados en las Figs. 7a y 7b no son iguales, es decir, tienen distribución tipo Bessel y son de geometría elíptica, el primero abre en la dirección de las frecuencias  $v$ , mientras que el segundo abre en la dirección de eje de frecuencias espaciales  $u$ , en base a que las aberturas circulares, ha sufrido una rotación de  $\pi/2$  respecto del eje  $x_0$  en el plano objeto. Aunque las aberturas mantengan su geometría circular.

## 5. Simulación

La simulación computacional permite de una forma visual y práctica validar los resultados del modelo matemático de difracción, en este caso empleamos el método numérico "Beam

Propagation Method", que es una herramienta computacional ampliamente utilizada en óptica, y es una técnica numérica viable para el cálculo de haces ópticos en propagación libre, con pequeñas o nulas variaciones en el índice de refracción [10].

El algoritmo se implementó en el software matemático MatLab, para emular la propagación del haz laser de onda plana con longitud de onda de 632 nm, por dos aberturas circulares de radios de diferentes magnitudes de  $a_1 = 1.0$  mm y  $a_2 = 1.5$  mm respectivamente, tomadas como objeto difractor. Se construyó una malla de  $60 \times 60$  mm, considerando 975 muestras tanto para el eje  $x$ , como para el eje  $y$ . La distancia entre los centros de las dos aberturas es de 7 mm.

Una lente es un objeto de fase, para emular un doblete acromático, consideramos un retardo de fase entregado por una lente esférica perfecta convergente con una longitud focal de 25 cm. El objeto difractor se colocó a la distancia fija  $d_0 = 25$  cm, que es equivalente a la distancia focal frontal del doblete cementado. Los diferenciales en el eje de propagación  $z$  son  $d_z = 20$  mm.

Para cada valor del  $dz$  se obtuvo una gráfica de intensidad del haz óptico difractado, guardando las imágenes presentadas en la Fig. 4. f), g), h), i) y j) correspondientes a las mismas distancias  $z$  a las que se tomaron las fotografías en la parte experimental, ver Tabla I, dentro de la zona convergente; así como las del caso de la zona divergente del doblete cementado; además, para este caso de simulación también se consideró que los centros geométricos de las aberturas fueron orientados en el eje  $x_0$ . Para el caso de los centros geométricos paralelos al eje  $y_0$  se obtuvo una gráfica de intensidad del haz óptico difractado, guardando las imágenes simuladas, las cuales se muestran en la Fig. 6. d), e) y f), y corresponden a las mismas distancias  $z$  a la lente de acuerdo a la Tabla II, a las que se tomaron las imágenes en la etapa experimental, tanto en la zona convergente y divergente del doblete cementado.

En la Fig. 7. c) y d) se muestran los patrones de difracción simulados de transformada de Fourier, obtenidos en el plano focal o de Fraunhofer de la lente, las líneas de difracción de Young son bastante claras y bien definidas, y se aprecia su orientación horizontal y vertical. En tanto que las franjas de Bessel se distribuyen como las obtenidas de forma experimental ver Fig. 7. a) y b); es decir, las franjas de máxima y de mínima intensidad son elípticas, como lo predijeron [6].

## 6. Conclusiones

Los modelos matemáticos de convolución de transformadas de Fourier Ecs. (11) y (12), permiten establecer que las fun-

ciones de Bessel de orden uno son las dominantes en los productos para generar los mínimos de la Fig. 3a; mientras que las funciones de Bessel de orden cero son dominantes para generar los máximos de irradiancia central ver Figs. 3b, 3d y 5b. Por lo que se refiere a las Figs. 3c, 3e, 5a y 5c se observa que a las distancias que se grabaron, ver Tablas I y II, se alternan tanto la función de Bessel de orden uno, como la de orden cero en los productos, para producir de manera simultánea un mínimo y un máximo de irradiancia centrales.

Los resultados de tipo experimental mostrados en las Figs. 7a y 7b refuerzan lo publicado por [5], en lo referente a las imágenes de transformada de Fourier, en ellas se hace evidente la forma elíptica del patrón de difracción.

En lo que respecta a las imágenes de los patrones de difracción Figs. 4, 6, 7c y 7d obtenidas mediante simulación, tanto en la zona convergente, focal o de Fraunhofer, así como en la divergente del doblete cementado; los patrones de intensidad son muy similares a los obtenidos de forma experimental mostrados en las Figs. 3, 5, 7a y 7b respectivamente.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la UJAT, el apoyo otorgado a través del programa PFI para el desarrollo del proyecto clave UJAT-2012-IB-45, del cual se derivó este trabajo. Uno de los autores (EAZ) agradece a la PLI Miroslava Zárate Delfín su apoyo en la redacción del Abstract de este trabajo.

1. G. M. Niconoff, J. M. López, y E. M. Martínez, *J. Opt. Am. A.* **10** (2001) 2089.
2. C. J. M. Sheppard y M. Hrynevych, *Diffraction by a circular aperture ageneralization of Fresnel diffraction theory*, *J. Opt. Am. A*, **8** (1992) 274.
3. O. Quintero, F. B. John, R. Henao, y F. Medina, *Optics Communications* **206** (2006) 558.
4. E. A. Zárate, *Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas*. Santa Mará Tonantzintla, INAOE Puebla, México. (2011) pp 5-190.
5. J. W. Goodman *Introduction to Fourier Optics*, 3a ed. McGraw Hill (2005) pp 78-84.
6. E. A. Zárate, Q. A. Córdova, J. A. H. Nolasco, G. G. Tepach, y C. G. T. Palacios. *Elliptical Bessel-like diffraction pattern produced by circular apertures whith different radius*, *Pro. of SPIE*, **8785** (2013) 1-6.
7. J. D. Gaskill, *Linear systems Fourier transforms and optics*, John Wiley and Sons (1978) pp 150-217.
8. S. I. Hayek, *Advanced mathematica methods in science and engineering* Weber, Marcel Dekker (2001) pp 166-176.
9. N. Bracewell Ronal, *The Fourier transforms and its applications*, McGraw Hill, (2002) pp 129, 332.
10. D. Schmidt Jason, *Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB*, Edit Spie press (2010).